Chapitre I

Zéro, un et les autres

D'après les spécialistes de l'évolution des espèces, l'intelligence de type humain commença à apparaître chez certains animaux le jour où ceux-ci se dressèrent sur leurs pattes de derrière, leur permettant ainsi de consacrer celles de devant à autre chose qu'à la locomotion ; par exemple à cirer les chaussures destinées à celles de derrière. Mais cette application particulière n'apparut qu'à un stade assez avancé de l'évolution humaine, et c'est un autre usage de ses mains qui avait précédemment permis à l'Homme de faire un grand pas en avant : le fait de compter sur ses doigts.

Les manchots, eux aussi, marchent sur leurs pattes de derrière, mais ils n'ont pas de doigts au bout de leurs nageoires. L'homme, lui, avait été doté par la nature de deux mains de cinq doigts chacune, chaque doigt ayant trois phalanges, sauf le pouce qui n'en a que deux. Il découvrit alors la possibilité d'utiliser ces doigts et/ou ces phalanges comme support d'un décompte pas à pas, la méthode la plus répandue consistant à déplier ses doigts un par un jusqu'à épuisement du stock, c'est-à-dire jusqu'à dix.

Tant qu'il n'y avait pas plus de dix mammouths en face de lui, cela lui suffisait. Mais le problème se compliquait lorsqu'il devait compter des nombres supérieurs à dix, par exemple le nombre de jours s'écoulant entre la pleine lune et la nouvelle lune, lequel est proche de quinze. Face à ce problème, une fois parvenu au dixième jour après la pleine lune, son intelligence lui suggéra de mettre en réserve la dizaine qu'il venait d'atteindre afin de repartir le lendemain dans une nouvelle série d'unités. Ce lendemain, onzième jour après la pleine lune, se trouva donc représenté par une dizaine entière plus un doigt de la nouvelle série ; et le jour de la nouvelle lune, quatre jours plus tard, se trouva représenté par une dizaine entière plus cinq doigts.

Le pas suivant était de matérialiser ce calcul sous forme écrite. À travers les siècles, les méthodes adoptées à cette fin ont été diverses d'une civilisation à l'autre, avant d'en arriver au principe actuel qui consiste à transcrire le nombre « quinze » sous la forme du chiffre « un » représentant la dizaine entière suivi du chiffre « cinq » représentant les cinq doigts de la nouvelle série, ce qui s'écrit sous la forme « 15 » ; et, de la même façon, à transcrire le nombre « onze » sous la forme « 11 ».

***

Mais alors, si l'on numérote 15 le jour correspondant à une dizaine entière plus cinq doigts supplémentaires, et 11 le jour correspondant à une dizaine entière plus un doigt supplémentaire, comment doit-on numéroter le dixième jour, qui correspond à une dizaine entière sans aucun doigt supplémentaire ?

Par analogie avec quinze et onze, la réponse est évidente : ce nombre dix doit s'écrire sous la forme du chiffre 1 suivi d'un autre chiffre signifiant « rien du tout », c'est-à-dire zéro.

La réponse est évidente, mais il lui fallut de nombreux siècles pour s'imposer — peut-être parce que, contrairement aux autres chiffres, il n'existe aucun doigt pour matérialiser ce zéro. Certes, en tant que symbole d'écriture, le signe « zéro » était apparu dès le IIIe siècle avant notre ère chez les Babyloniens, mais il n'existait pas dans la numérotation romaine. Quant au nombre zéro, il n'allait apparaître que plusieurs siècles plus tard en Inde, et il fallut attendre le IXe siècle de notre ère pour le voir arriver en Europe via l'Espagne où il fut apporté par les mathématiciens arabes : une bien longue histoire pour une aussi petite valeur.

Alors, jusqu'à cette date, l'existence du « zéro » fut purement et simplement omise, ce qui conduisit à certaines aberrations arithmétiques dont nous vivons encore les conséquences : on y reviendra plus loin.

Incidemment, les chiffres que nous qualifions d'« arabes » ne sont pas ceux employés par les Arabes. En revanche, l'écriture des nombres de gauche à droite est commune à toutes les langues, y compris celles qui s'écrivent dans l'autre sens comme l'arabe ou l'hébreu ; ce qui pose quelques problèmes de frappe sur les claviers d'ordinateur, et qui en posait de bien plus difficiles encore à l'époque des machines à écrire mécaniques.

***

À ce zéro près, voilà comment l'homme inventa le système à base dix qu'il pratique encore de nos jours. Ainsi Monsieur Jourdain, non content de parler en prose, comptait-il aussi en base dix, ce qui l'aurait empli d'orgueil s'il en avait eu conscience.

Mais que se serait-il passé si la nature avait doté l'homme de huit doigts ? Selon le même processus, il aurait d'abord compté sur ses doigts jusqu'à huit ; puis, pour aller au-delà, il aurait mis en réserve la huitaine qu'il venait d'atteindre afin de repartir dans une nouvelle série d'unités, série qu'il aurait dû entamer dès le neuvième jour après la pleine lune. Puis, pour transcrire les nombres correspondants sous forme écrite, il aurait employé le même principe, en supprimant simplement les chiffres 8 et 9 vu qu'ils n'existent pas : c'est cette remarque qui permet aujourd'hui aux agrégés de mathématiques de compter en base huit sans recourir à l'amputation de deux doigts. Il aurait ainsi créé le système à base huit dans lequel :

– le nombre « neuf » s'écrit « 11 », soit une huitaine entière plus un doigt ;
– et pour atteindre la nouvelle lune, ce sont sept doigts, et non plus cinq, qu'il faut déplier en supplément de la huitaine entière, si bien que le nombre « quinze » ne s'écrit plus 15 mais 17.

Il est donc essentiel, quand on lit des nombres dans une base autre que dix, de prononcer 11 sous la forme « un-un » et 17 sous la forme « un-sept » afin d'éviter toute erreur.

Le problème est plus ardu si l'on veut compter dans la base douze car, en partant de la base dix, il faut non plus retrancher deux chiffres « huit » et « neuf » mais au contraire en créer deux nouveaux, par exemple en recourant aux deux premières lettres de l'alphabet grec α et β (*alpha* et *bêta*).

Dans le roman et le film *La Planète des singes*, l'histoire ne dit pas si les chimpanzés — qui savent parler, écrire et compter — ont adopté le système à base vingt au motif qu'ils ont quatre mains de cinq doigts chacune. Si tel est le cas, ils ont dû créer vingt chiffres de zéro à dix-neuf. Cela peut paraître beaucoup, mais nous utilisons déjà couramment un système à base vingt-six constitué par les vingt-six lettres de l'alphabet, par exemple pour « numéroter » les voitures sur leurs plaques minéralogiques : quand une immatriculation comporte une série de trois lettres, de *AAA* à *ZZZ*, ce *ZZZ* est le plus grand des nombres à trois chiffres, donc l'équivalent de 999 en base dix.

***

Quels sont les dix chiffres du système à base dix ? Si l'on oublie de tourner sept fois sa langue dans sa bouche, on risque de répondre inconsidérément « un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix ». Zéro pour cette réponse ! En effet, « dix » — alias « 10 » — n'est pas un chiffre mais un nombre de deux chiffres. La bonne réponse est donc : « zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf ». Et dans le sens inverse, si l'on fait le compte à rebours des dix dernières secondes avant le départ d'une fusée spatiale, il faut obligatoirement compter « neuf, huit… quatre, trois, deux, un, zéro » : si l'on s'arrêtait à « un », la fusée ne partirait pas.

En base huit, il existe semblablement huit chiffres de 0 à 7, puis sept chiffres de 0 à 6 en base sept, et ainsi de suite. Alors, en poursuivant le raisonnement, combien y a-t-il de chiffres dans le système à base deux, alias « binaire » ?

Réponse : il y en a 10 ; ce nombre « 10 » devant évidemment être lu sous la forme « un-zéro », ce qui fait deux en base deux tout comme cela fait dix en base dix. Le système binaire comporte donc deux chiffres 0 et 1 ; et comme, en anglais, « chiffre » se dit *digit* (ancien mot signifiant « doigt »), ces deux chiffres s'appellent des « bits », abréviation de *binary digits* qui signifie « chiffres binaires ».

Dans ce système binaire, les nombres impairs se terminent par 1 et les nombres pairs par 0. D'une façon plus précise :

– une fois que l'on a écrit « zéro » = 0 et « un » = 1, on ne dispose plus d'aucun chiffre pour signifier « deux », alors on est obligé de passer au premier nombre à deux chiffres, à savoir 10 ;
– le nombre suivant — « trois » — s'écrit alors 11 (« un-un »), mais le problème se pose à nouveau lorsqu'on arrive à « quatre » : faute d'un autre chiffre au-delà de 1, on est obligé de passer au premier nombre à trois chiffres, à savoir 100 (« un-zéro-zéro ») ;
– puis, comme le montre la fig. 1, on parvient à faire trois nombres supplémentaires à trois chiffres, à savoir 101, 110 et 111. Mais là, une fois de plus, on se trouve bloqué et il faut passer à quatre chiffres pour écrire « huit » sous la forme 1000.

base dix	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
base deux	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	…

Fig. 1 – Nombres de un à dix en système à base dix et en système binaire

Puis l'histoire continue, en passant par le nombre dix qui s'écrit 1010, jusqu'au nombre quinze qui s'écrit 1111, avant d'être obligé de passer au premier nombre à cinq chiffres 10 000 pour représenter le nombre seize : si, au lieu de numéroter nos rois en chiffres romains, nous les numérotions en binaire, Louis XVI s'appellerait donc Louis 10 000.

***

Pourquoi se compliquer la vie en écrivant « dix » sous la forme 1010 au lieu de 10 ? C'est parce que la base deux est la mieux adaptée au comptage des nombres par voie électronique, lequel constitue le fondement de l'informatique.

Certes, on n'avait pas attendu le système binaire pour fabriquer des machines à calculer : la première d'entre elles avait été créée dès 1652 par le jeune Blaise Pascal dans le but d'aider son père à effectuer de difficiles calculs, en l'occurrence au profit du fisc. C'était un petit pas pour le fisc mais un grand bond pour l'humanité, car cette machine allait s'avérer d'un usage très universel. Et comme cette « pascaline » fonctionnait d'une façon purement mécanique avec des roues dentées dont on était libre de choisir de nombre de dents, elle permettait de compter en base dix.

Mais l'avènement de l'électronique allait remplacer tout cet ensemble mécanique par des montages fondés sur le principe de la cellule « flip-flop ». Celle-ci était formée de deux lampes à vide de type triode (car il n'y avait pas encore de transistors à l'époque), dénommées ci-après *A* et *B*, montées en parallèle et interconnectées de façon à provoquer un basculement de l'une vers l'autre chaque fois que la cellule recevait une impulsion électrique. Ce basculement signifie que, si la première impulsion était reçue par la lampe *A*, la deuxième était automatiquement aiguillée vers la lampe *B*, puis la troisième à nouveau vers *A*, puis la quatrième à nouveau vers *B* et ainsi de suite (fig. 2), l'alternance des lampes *A* et *B* correspondant à l'alternance des nombres impairs et pairs :

– lorsque l'impulsion aboutit à la lampe *A*, la cellule affiche le chiffre « 1 » ;
– lorsqu'elle aboutit à la lampe *B*, la cellule affiche le chiffre « 0 ».

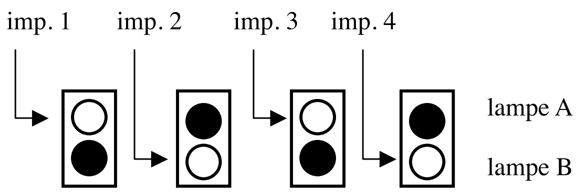

Fig. 2 – Basculements successifs entre les deux lampes d'une cellule flip-flop

C'est la logique dite « binaire » où l'accès d'une impulsion est soit autorisé, soit interdit, contrairement à la logique socialement modulée où il pourrait être autorisé, toléré, déconseillé, interdit ou strictement interdit.

***

Lorsqu'on défile au pas cadencé en alternant son appui d'un pied sur l'autre, on effectue le même type de basculement, à cela près qu'au lieu de compter « un, zéro, un, zéro » (le « un » correspondant à la lampe *A*), on compte « un, deux, un, deux » (le « un » correspondant au pied gauche). Mais une fois que l'on a compté « deux » en arrivant sur le pied droit, on ne repart pas en arrière avec le « un » suivant : on poursuit sa route avec un nouveau « un, deux », puis un autre encore, etc. C'est ce que l'on fait aussi avec des cellules flip-flop, mais cela exige d'en assembler un certain nombre représentant respectivement les unités, les dizaines, les centaines, etc. à la mode binaire, de façon à constituer un compteur dans lequel les impulsions reçues par la cellule des unités se propagent de proche en proche vers celles d'ordre supérieur en parcourant l'un après l'autre tous les nombres de la fig. 1, selon le processus détaillé dans l'annexe 1.

À partir de là, dès lors que l'on est capable de compter, il est assez facile d'additionner, de multiplier, etc. Ainsi, pour additionner 3 et 5 :

– au lieu de déplier trois doigts, on envoie trois impulsions dans un montage flip-flop ;
– puis au lieu de déplier cinq doigts supplémentaires, on envoie cinq impulsions supplémentaires ;
– et on lit le résultat : 8 doigts ou 1000 impulsions, c'est-à-dire le même nombre.

C'est sur ce principe que fut construit en 1943, aux États-Unis, le premier ordinateur électronique de l'histoire : l'ENIAC. Avec près de 20 000 lampes, c'était un monstre pesant 30 tonnes et consommant 140 kilowatts, tout cela pour une performance qui paraît aujourd'hui dérisoire. De surcroît, son énorme consommation électrique exigeait un système de refroidissement de taille considérable, qui ne l'empêchait pourtant pas de chauffer fortement.

Ce défaut fut la source de la première erreur de calcul électronique, due à un court-circuit provoqué par un insecte — *bug*, en américain — qui était venu se mettre au chaud entre deux lampes. C'est ainsi que le terme *bug*, francisé en « bogue », fut adopté pour désigner une erreur dans un calcul informatique.

***

Depuis lors, les lampes ont été remplacées par des transistors puis des circuits intégrés, que l'on a peu à peu miniaturisés en regroupant leurs composants en « puces », communément vendues dans les marchés aux puces électroniques. Cela étant, le principe de base du flip-flop n'est pas obligatoirement lié à l'électronique, et on pourrait concevoir un compteur fonctionnant avec n'importe quel ensemble binaire, par exemple avec les nageoires des manchots. Supposons en effet qu'une colonie de manchots décide de compter les poissons qui passent afin de faire des statistiques. Il suffit pour cela qu'un premier manchot se place au bord de l'eau, et que les autres se placent derrière lui en file indienne. Quand le premier manchot — le manchot « unités » — voit un premier poisson, il lève la nageoire gauche. Puis, lorsqu'il en voit un deuxième, il opère un basculement de position en levant la nageoire droite et en baissant la gauche. Le manchot « dizaines » réagit alors en levant la nageoire gauche, qu'il laisse levée jusqu'à ce que le manchot « unités » lève à nouveau sa nageoire droite, c'est-à-dire au quatrième poisson. Là, le manchot « dizaines » abaisse sa nageoire gauche en levant la droite, ce qui déclenche l'entrée en scène du manchot « centaines » en lui faisant lever sa nageoire gauche. Et ainsi de suite.

À force de vivre dans un environnement électronique, on en oublie les solutions simples et écologiques.

Chapitre 2

De Jules à Grégoire

Parmi les nombres entiers, certains ont toujours eu une certaine résonance psychologique ou superstitieuse, tels que sept et treize, le second étant chargé d'une telle connotation péjorative que, dans la plupart des avions de ligne, la numérotation des rangées passe directement de douze à quatorze afin qu'il n'existe pas de rangée numéro treize.

C'est une précaution qu'omit de prendre l'agence spatiale américaine dans la série de ses missions lunaires. De ce fait, après Apollo 11 qui fut la première à débarquer des hommes sur la Lune, puis Apollo 12 peu après, vint Apollo 13 en avril 1970. Pour comble, elle décolla à 13 heures et 13 minutes. Deux jours plus tard, un de ses réservoirs à oxygène explosa et manqua d'anéantir le véhicule spatial.

Toutefois, la peur du nombre treize n'est rien auprès de la panique qui marqua l'approche de l'an mille de notre ère, que l'usage conduit à orthographier « mil ». Les hommes, en effet, ont toujours été très attirés par les nombres « en chiffres ronds », c'est-à-dire qui se terminent par des zéros, lesquels ne sont effectivement pas carrés. Alors, en cet an mille en chiffres super-ronds (puisqu'il s'agissait du premier nombre à quatre chiffres du calendrier), toute la chrétienté se persuada que, conformément à la prédiction de la Bible, allait se produire l'Apocalypse.

Mais à vrai dire, il n'y a aucune raison pour que l'Apocalypse compte comme nous en base dix : si par hasard elle comptait en base treize, l'année numérotée 1000 dans son calendrier correspondrait pour nous à l'année 2197. C'est peut-être pour cela qu'il ne se produisit rien en notre an 1000 : il nous faudra encore un peu de patience.