Introduction

Les mathématiques financières, le temps et l'argent

Les philosophes et les poètes on beaucoup disserté sur le temps, le temps présent, le temps qui vient et le temps qui passe. Les fabulistes et les moralistes se sont parfois passionnés pour l'argent et sa nature, et sur son aptitude à faire le bonheur des êtres humains. L'argent est représenté par la monnaie, qui permet les échanges. Les économistes, en particulier Léon Walras, ont voulu considérer la monnaie comme une marchandise, en particulier parce qu'elle permet d'obtenir (presque) tout le reste. Mais bien qu'elle prenne des formes et des supports divers, la monnaie est aussi dans nos civilisations modernes un instrument de calcul abstrait, souvent à la limite du réel comme les récentes crises financières l'ont bien mis en évidence. Sans faire beaucoup d'humour, on pourrait dire que l'argent simplifie les échanges mais complique la vie. Parmi ses qualités techniques, la principale est sans doute qu'on peut le stocker, le transférer à la vitesse de la lumière et qu'il sert à mesurer, à comparer. Mais une économie ou une civilisation avec simplement de l'argent serait pauvre. L'autre paramètre important des économies sociales, irréductible, lié à l'argent est le temps.

Le temps est une notion pratique à utiliser pour montrer l'évolution du monde, toujours en mouvement, et on a classé le temps en présent, passé et futur. On a ensuite procédé à des divisions plus larges et plus fines, mais le principal problème du temps est un problème de frontières : dans la vie courante, nous ne savons jamais à quel moment nous passons d'un temps à un autre, sauf peut-être le premier jour de l'année, où nous prenons conscience, comme l'Ecclésiaste, roi de Jérusalem, de la tyrannie du temps et des jours. Les grandes cultures du monde se sont toujours interrogées sur le temps, sur la temporalité, sur l'immortalité. L'autre grande caractéristique du temps, notamment le temps de la vie des hommes, est qu'il n'a qu'un sens et qu'on ne peut pas revenir dans le passé. Mais pour les calculs financiers, on peut facilement passer du passé, au présent, au futur à l'aide de formules adéquates que nous découvrirons.

Les mathématiques financières, grandes utilisatrices de temps et d'argent abstrait dans leurs calculs, sont pragmatiques : elles cherchent purement et simplement à faire gagner de l'argent, ou ce qui est encore plus rapide, à en faire économiser en fonction du temps, et comme l'approche philosophique du temps est compliquée, on le découpe en tranches annuelles, mensuelles ou journalières, en variables discrètes disent les mathématiciens par rapport au temps qui est par nature une variable continue. Depuis des siècles, de nombreuses techniques, le plus souvent venues de l'Antiquité en général et des Grecs en particulier ont permis de gagner ou de perdre de l'argent.

La rencontre scientifique du temps et de l'argent est une aventure passionnante car elle ouvre des perspectives immenses de réflexion, de recherche, et ce qui n’est pas le moins important, des méthodes pratiques de calcul et de comparaison.

Le temps et l’argent sont des liens immatériels et matériels incontournables de la vie sociale, et dans cet ouvrage, nous comptons apporter notre contribution aux mathématiques financières en faisant une sorte de lien entre les techniques les plus classiques et les plus ancestrales, que nous rappellerons souvent pour nous souvenir de nos prédécesseurs, et entre les techniques les plus modernes qui effraient le commun des mortels, tels que les opérations boursières, financières, les évaluations, les investissements et les nombreux paramètres qu’elles obligent à surveiller.

Notre souhait est que le lecteur trouve dans ce livre ce qu’il y cherche, des conseils, des recettes, des méthodes, mais aussi, parfois, quelques bonnes surprises qu’il ne s’attendait pas à y trouver, un peu comme dans les jeux de sociétés, lorsque les autres joueurs vous versent une prime à laquelle vous ne vous attendiez pas.

➤ Chapitre 1

La boîte à outils indispensables

Ce que vous allez apprendre

- Les mathématiques financières utilisent les puissances, les logarithmes et les suites arithmétiques et géométriques pour faire les calculs financiers.
- Elles utilisent aussi certaines fonctions, linéaires, exponentielles, logarithmiques pour des calculs plus compliqués.
- Les logarithmes et les puissances permettent de résoudre des équations de degré supérieur à 3, par essai-erreur ou par calcul de logarithme.
- Les calculs peuvent aussi être réalisés par programmation de machines à calculer programmables, par tableur ou par machine à calculer simple comportant quatre opérations.
- Les calculs peuvent aussi être réalisés de manière traditionnelle en utilisant des tables numériques, des tables financières ou des tables de logarithmes.
- L'objet de ce chapitre est de faire des rappels mathématiques simples, dont le niveau ne dépasse pas celui du baccalauréat.
- Nous travaillerons en univers certain, avec des variables discrètes (non continues) à l'exception du dernier chapitre.
- Nous n'aborderons pas les mathématiques de niveau supérieur et les mathématiques financières fondées sur le calcul des probabilités.
- Dans le dernier chapitre, nous donnerons quelques éléments sur les mathématiques considérant le temps comme une variable continue et non comme une variable discontinue, à titre de curiosité.

I. LA BOÎTE À OUTILS MATHÉMATIQUE

La progression des différentes notions que nous avons choisi de suivre ici est inspirée d'un texte de Jean-Pierre Demailly intitulé *Puissances, exponentielles, logarithmes de l'école primaire jusqu'à la Terminale*[1]. Elle présente l'avantage de pouvoir se passer de notions telles que les équations différentielles et le calcul intégral pour définir le logarithme et l'exponentielle.

1. Puissances

Nous commençons par quelques rappels sur les puissances d'exposant entier (positif ou négatif) d'un nombre réel — même si dans l'application aux mathématiques financières, il n'y a en réalité que des nombres décimaux — puis celles d'exposant fractionnaire.

Exposant entier

Soit $n \geq 1$ un entier positif et a un nombre réel (c'est-à-dire un nombre pouvant repérer un point sur un axe gradué). On note a^n, et on appelle puissance n-ième de a, le produit de n nombres égaux à a.

Exemples :

1. $a^1 = a$ pour tout a ;
2. $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$;
3. $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

Pour calculer avec les puissances, on dispose des propriétés suivantes :

(i) pour $n \geq 1$, $m \geq 1$, et a un nombre réel :

$$a^{n+m} = a^n \times a^m ;$$

(ii) pour $n \geq 1$, $m \geq 1$, et a un nombre réel :

$$a^{nm} = \left(a^n\right)^m ;$$

(iii) pour $n \geq 1$, a et b nombres réels :

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

Ces propriétés s'établissent en raisonnant directement à partir de la définition. Nous pouvons observer que :

$$\frac{3^5}{3^5} = 1$$

et de façon plus générale, que pour $n \geq 1$ et a un nombre réel non nul :

$$\frac{a^n}{a^n} = 1 .$$

1. Il s'agit de la référence [E4] sur la page : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html

Ainsi on est conduit à poser, pour $n \leq 1$ et a un nombre réel non nul :

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}},$$

qui a bien un sens puisque $-n \geq 1$ est entier.
Maintenant,
(iv) pour n et m sont deux entiers supérieurs à 1, vérifiant $n \neq m$, et a un nombre réel non nul :

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}.$$

La question se pose alors de définir a^0 pour a réel. Si $a \neq 0$, on pose par convention $a^0 = 1$ afin que les propriétés (i) à (iv) ci-dessus restent vraies pour tous entiers n et m indépendamment de leur signe.
Une fois les puissances d'exposant entier définies, nous pouvons définir les puissances d'exposant fractionnaire ou réel.

Exposant fractionnaire ou réel
Si $q \geq 1$ est un entier, on définit, pour chaque nombre réel $a > 0$ la puissance $a^{1/q}$ comme l'unique solution réelle positive de l'équation $x^q = a$. On écrit aussi $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$ et on a $\left(a^{1/q}\right)^q = a$.
Si maintenant $r = \dfrac{p}{q}$ est un nombre rationnel, avec p entier relatif et q entier naturel non nul, on pose : $a^r = a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$.
Les formules (i) à (iii) sont alors valables pour n et m rationnels et $a > 0$ réel.
Si maintenant x est un nombre réel, on voudrait définir a^x pour $a > 0$ réel.
Il suffit pour cela d'utiliser les approximations décimales (donc rationnelles) de x par défaut et de x par excès. Soient (r_n) et (r'_n) ces deux suites, respectivement. On démontre alors, en utilisant des propriétés générales sur les suites, que les suites $\left(a^{r_n}\right)$ et $\left(a^{r'_n}\right)$ ont la même limite. C'est cette limite commune que l'on notera a^x.

ATTENTION !

Il n'est pas possible de définir de manière univoque 0^0 ! En effet, si ce nombre existait, pour des raisons de continuité, il serait bon qu'il soit égal à la limite de l'expression x^y lorsque x et y tendent vers 0. Or cette limite fait partie des « formes indéterminées ». Le lecteur intéressé pourra aller consulter la discussion attenante sur le lien suivant :
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,524525,page=1

2. Suites arithmétiques et géométriques

a. Suite arithmétique

On appelle suite *arithmétique* de raison r, la donnée d'une collection infinie de nombres réels indexée par l'ensemble des entiers naturels, notée (u_n) et vérifiant :

$$u_{n+1} - u_n = r \text{ pour tout entier } n \geq 0.$$

Le problème se pose alors :

- de calculer le terme général de la suite, c'est-à-dire d'exprimer u_n en fonction de n ;
- de calculer la somme des n +1 premiers termes de la suite ;
- de déterminer sa nature, c'est-à-dire sa limite, si elle existe.

Nous donnons ci-dessous la réponse à ces trois problèmes.

Terme général

L'expression du terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

$$u_n = u_0 + nr \text{ pour tout entier } n \geq 0.$$

Cela se démontre par récurrence sur l'entier n.

Somme

Appelons S_n la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. On calcule :

$$2\,S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$
$$2\,S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \ldots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0)$$
$$2\,S_n = (u_0 + u_0 + nr) + (u_0 + r + u_0 + (n-1)r) + \ldots + (u_0 + (n-1)r + u_0 + r) + (u_0 + nr + u_0)$$
$$2\,S_n = (u_0 + u_0 + nr)\,(n+1)$$

d'où finalement :

$$S_n = \frac{(u_0 + u_0 + nr)(n+1)}{2},$$

c'est-à-dire que la somme des n + 1 premiers termes d'une suite arithmétique de raison r est égale à la demi-somme du produit du nombre de termes de la suite par la somme du premier et du dernier terme.

Nature

Il a trois cas à envisager :

- si $r = 0$, la suite est constante, et sa limite est égale à son premier terme ;
- si $r > 0$, la suite est strictement croissante, et sa limite est $+\infty$;
- si $r < 0$, la suite est strictement décroissante et sa limite est $-\infty$.

b. Suite géométrique

On appelle suite *géométrique* de raison $q \neq 0$, la donnée d'une collection infinie de nombres réels indexée par l'ensemble des entiers naturels, notée (u_n) et vérifiant :

$$u_{n+1} = qu_n \text{ pour tout entier } n \geq 0.$$

Le problème se pose alors :

– de calculer le terme général de la suite, c'est-à-dire d'exprimer u_n en fonction de n ;
– de calculer la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite ;
– de déterminer sa nature, c'est-à-dire sa limite, si elle existe.

Nous donnons ci-dessous la réponse à ces trois problèmes.

Terme général

L'expression du terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

$$u_n = u_0 q^n \text{ pour tout entier } n \geq 0.$$

Cela se démontre par récurrence sur l'entier n.

Somme

Appelons S_n la somme $u_0 + u_1 +\ldots + u_n$. On calcule :

$S_n - qS_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n - qu_0 - qu_1 - \ldots - qu_n$

$S_n - qS_n = u_0 + qu_0 + \ldots + q^n u_0 - qu_0 - q^2 u_0 - \ldots - q^{n+1} u_0$

$S_n - qS_n = u_0 - q^{n+1} u_0$

d'où finalement, si $q \neq 1$:

$$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

c'est-à-dire que la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q est égale au produit du premier terme par le quotient de la différence entre 1 et la raison élevée à la puissance du nombre de termes et de la différence entre 1 et la raison.

Nature

Il y a plusieurs cas à envisager (on supposera $q > 0$) :

– si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, la suite est constante, et sa limite est égale à son premier terme ;
– si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est strictement croissante et sa limite est $+\infty$;
– si $u_0 > 0$ et $q < 1$, la suite est strictement décroissante et sa limite est 0 ;
– si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite est strictement décroissante et sa limite est $-\infty$;
– si $u_0 < 0$ et $q < 1$, la suite est strictement croissante et sa limite est 0.

On ne traitera pas ici le cas où $q < 0$: dans les applications pratiques aux mathématiques financières, on n'en a pas besoin.