Espaces vectoriels
Endomorphismes et matrices

01

RÉPARTITION DES EXERCICES

I. ÉNONCÉS DES EXERCICES

1.01 Soients $E = \mathbb{R}[X]$, $A \in E \setminus \{0\}$ et :

$$F = \{P \in E \ / \ P = 0 \ \text{ ou } \ d^\circ(P) < d^\circ(A)\}$$

1°) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2°) Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire G de F dans E.

◇

1.02 Soients $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$, $G = \{f \in E \ / \ \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0\}$ et F l'ensemble des fonctions constantes.

1°) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2°) F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

◇

1.03 Soients E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et (f, g) un couple d'endomorphismes de E.

1°) Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

2°) Montrer que si $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$, alors :

a) $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

b) $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

c) $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$ puis $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.

◇

1.04 Soients m un nombre réel, $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $E = \mathbb{R}^4$ et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base e est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ m & m & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°) Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.

2°) Quand a-t-on $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$?

◇

1.05 Soit la matrice A, carrée de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ (on a donc : } \forall\, i, j, a_{i,j} = 1)$$

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique e.

1°) Calculer A^p pour p entier naturel non nul quelconque.

2°) Montrer que : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A)$.

3°) Déterminer une base e' dans laquelle u est représenté par la matrice B définie par : $B = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

◇

1.06 Soient $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et f l'endomorphisme de E représenté, sur la base e, par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On définit $\begin{cases} F = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3, e_2 + e_3 + 2e_4) \\ G = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_4) \end{cases}$.

1°) Montrer que F et G sont stables par f.

2°) En déduire que A est semblable à une matrice blocs $B = \begin{pmatrix} M & O_2 \\ O_2 & N \end{pmatrix}$, où O_2 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(M, N) \in \big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$.

◇

1.07 Soient $E = \mathbb{R}^3$ et u un endomorphisme de E tel que : $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

1°) Soient $e_3 \in E$ tel que $u^2(e_3) \neq 0$, $e_2 = u(e_3)$ et $e_1 = u^2(e_3)$. Montrer que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

2°) Donner la matrice M de u sur la base e puis déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.

3°) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

◇

1.08 Soit $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$. On note id l'application identité de E.

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base e est A.

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de E définis par :

$$F = \mathrm{Ker}(f) \text{ et } G = \mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 2id).$$

1°) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2°) Déterminer la matrice dans la base e de l'endomorphisme $f^2 - 2f + 2id$ puis déterminer une base de G.

3°) Montrer que F et G sont deux-sous espaces vectoriels stables par f.

4°) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

5°) Déterminer une base e' de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme : $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$, avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

◇

1.09 Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, E un espace vectoriel réel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1°) On suppose dans cette question que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$.

a) Montrer que n est pair.

b) Déterminer le rang de f en fonction de n.

c) Montrer que f^2 est l'endomorphisme nul.

2°) On suppose dans cette question que f^2 est l'endomorphisme nul et que $n = 2\,\mathrm{rg}(f) = 2p$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$.

c) Montrer qu'il existe une base B de E telle que $M_B(f) = \begin{pmatrix} O_p & O_p \\ I_p & O_p \end{pmatrix}$,

où I_p est la matrice identité de dimension p et O_p la matrice carrée de dimension p dont tous les éléments sont nuls.

◇

1.10 Soient a, b, x trois nombres réels fixés. Calculer les déterminants suivants :

1°) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x & 2x & x-a-b \\ 2a & a-b-x & 2a \\ b-a-x & 2b & 2b \end{vmatrix}$

2°) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+a & x+b & a+b \\ ax & bx & ab \end{vmatrix}$

3°) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ x^2 & (x+b)^2 & b^2 \\ x^2 & a^2 & (x+a)^2 \end{vmatrix}$

4°) $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x^2 & a^2 \\ 1 & x^2 & 0 & b^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & 0 \end{vmatrix}$ **5°)** $\Delta_5 = \begin{vmatrix} x & b & b & a \\ b & x & a & b \\ b & a & x & b \\ a & b & b & x \end{vmatrix}$

◇

1.11 Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, x un nombre réel et les déterminants Δ_n et $D_n(x)$ définis par :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & n \end{vmatrix}$$

$$\text{et } D_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n-x \end{vmatrix}$$

1°) Donner une expression simple de Δ_n en fonction de n.

2°) Calculer, sous forme factorisée, $D_n(x)$ en fonction de n et de x.

◇

1.12 Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et (a, b) un couple de nombres réels tels que $a \neq b$. On définit le déterminant D_n d'ordre n par :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \dots & \dots & b \\ a & a+b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$$

1°) Déterminer une relation de récurrence liant D_n et D_{n-1}.

2°) En déduire que $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.

◇

1.13 Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et le déterminant D_n d'ordre

n défini par : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

1°) Trouver une relation de récurrence entre D_n et D_{n-1}.

2°) Calculer D_n.

◇

1.14 Soient x un nombre réel fixé, n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère le déterminant $D_n(x)$ d'ordre n défini par :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x & 0 \\ \vdots & & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

1°) Trouver, pour tout entier $n \geqslant 3$, une relation de récurrence entre les déterminants $D_n(x)$, $D_{n-1}(x)$ et $D_{n-2}(x)$.

2°) Calculer, pour $n \geqslant 2$, $\Delta_n(x) = D_n(x) - D_{n-1}(x)$.

3°) En déduire $D_n(x)$ en fonction de n et de x.

◇

1.15 Soient les déterminants D_n définis par $D_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

1°) Déterminer, pour tout $n \geqslant 2$, une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}.

2°) En déduire la valeur de D_n en fonction de n.

◇

1.16 Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de n scalaires, on définit le déterminant de *Vandermonde* d'ordre n, noté $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, par :

$$V_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Montrer que : $\forall\, n \geqslant 2, V_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod\limits_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$.

$\diamond$

1.17 Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On définit le déterminant $D_n(x)$ par :

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{x^2}{2!} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & & \ddots & x & 1 \\ \dfrac{x^n}{n!} & \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \ldots & \dfrac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

1°) Montrer, pour tout $n\geqslant 2$, que D_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $D_n'(x)$.

2°) En déduire $D_n(x)$.

$\diamond$

1.18 Soient n un entier naturel pair non nul, A une matrice carrée antisymétrique réelle de dimension n et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
On définit l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x)=\det(A+xJ)$.

1°) Montrer que l'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est constante.

2°) En déduire que : $\forall\, x\in\mathbb{R}, \det(A+xJ)=\det(A)$.

3°) Déterminer la somme des cofacteurs de la matrice A.

$\diamond$

1.19 Soient $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et trois nombres entiers naturels non nuls n, p et q tels que $n=p+q$.
On considère trois matrices $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B\in\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $C\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, puis on définit la matrice carrée M d'ordre n par : $M=\begin{pmatrix} A & C \\ O_{q,p} & B \end{pmatrix}$

1°) Calculer $\det\begin{pmatrix} A & D \\ O_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$ et $\det\begin{pmatrix} I_p & D \\ O_{q,p} & B \end{pmatrix}$, pour $D\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. .

2°) En déduire que $\det(M)=\det(A)\det(B)$.

$\diamond$

1.20 Soit $e=(e_1,e_2,e_3)$ une base de $E=\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E représenté sur la base e par la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1°) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

2°) En déduire que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

◇

1.21 Soient les deux matrices A et B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B sont semblables.

◇

1.22 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n non nulle et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Le but de cet exercice est de montrer que la trace de l'endomorphisme f est nulle.

1°) Montrer que : $\exists\, x \in E$ tel que $e = \big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$ soit une base de E.

2°) Déterminer la matrice de f sur la base e puis conclure.

◇

1.23 **1°)** Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation : $X + \mathrm{tr}(X).\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

2°) Soient n un entier naturel non nul et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation : $AX - XA = I_n$.

◇

1.24 Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un nombre entier naturel non nul et l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puis on définit les trois endomorphismes u, v et w de E par :

$$\forall\, M \in E, u(M) = AM, v(M) = MB \text{ et } w(M) = AMB.$$

Déterminer les traces de ces trois endomorphismes.

◇

1.25 Soient n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $A^k = I_n$ pour $k \neq 0$.
On pose $B = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ puis on définit les endomorphismes u et v de $\mathbb{K}^n$ de matrices respectives A et B dans la base canonique.

1°) Montrer que :

a) $\mathrm{Ker}(u - id) = \mathrm{Im}(v)$.
b) $\mathrm{Im}(u - id) = \mathrm{Ker}(v)$.
c) $\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v) = \mathbb{K}^n$.

2°) En déduire : $\mathrm{tr}(B) = k.\,\mathrm{rg}(B)$.

II. INDICATIONS

1.01. Penser à la division euclidienne.

1.02. Pour montrer que F et G sont supplémentaires, montrer que $E = F + G$ puis que $F \cap G = \{0\}$.

1.03. Exercice assez simple qui nécessite de bien connaître les définitions de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$ et de penser au théorème du rang pour finir.

1.04. Ne pas oublier le cas $m = 0$.

1.05. Pour **1)**, calculer A^2 et en déduire A^p. Pour **3)**, utiliser le résultat de **2)**.

1.06. On montrera que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires.

1.07. Pour la question **3)**, étudier les sous-espaces stables en fonction de leur dimension et utiliser la base définie en **1)** pour déterminer les sous-espaces stables de dimension 2.

1.08. Utiliser des bases de F et de G pour obtenir A'.

1.09. Pour le **2) b)**, penser à utiliser les dimensions des espaces considérés. Pour le **2) c)**, utiliser un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$.

1.10. Utiliser des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes d'un déterminant, ainsi que la multilinéarité, pour factoriser autant que possible.

1.11. Bien choisir les opérations à effectuer sur les lignes et les colonnes afin d'obtenir des déterminants triangulaires.

1.12. **1)** Faire $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis développer par rapport à C_1. **2)** On rappelle la formule : $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

1.13. Faire apparaître $(n - 1)$ zéros sur une colonne de D_n pour obtenir une relation de récurrence entre D_n et D_{n-1}, puis remarquer que l'on obtient une suite géométrique pour conclure.

1.14. On pourra commencer par développer le déterminant $D_n(x)$ par rapport à sa première colonne pour obtenir une relation de récurrence entre $D_n(x)$, $D_{n-1}(x)$ et $D_{n-2}(x)$ puis remarquer que la suite $(\Delta_n(x))_n$ est une suite géométrique pour conclure.

1.15. On utilisera les résultats sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

1.16. Faire une démonstration par récurrence. Pour évaluer V_{n+1}, introduire le polynôme $P = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$ et le développer pour construire une opération sur les colonnes simplifiant la dernière.

1.17. Utiliser la dérivabilité des formes n-linéaires ainsi que l'expression de leurs dérivées pour obtenir une expression de $D'_n(x)$ en fonction de $D_{n-1}(x)$.

1.18. **1)** Introduire la matrice colonne U dont tous les termes valent 1 et qui engendre donc J puis l'utiliser dans le développement du calcul de la dérivée de $f'(t)$. **2)** Montrer que l'application f est paire. **3)** Développer $\det(C_1, \ldots, C_{k-1}, U, C_{k+1}, \ldots, C_n)$ par rapport à la colonne U.