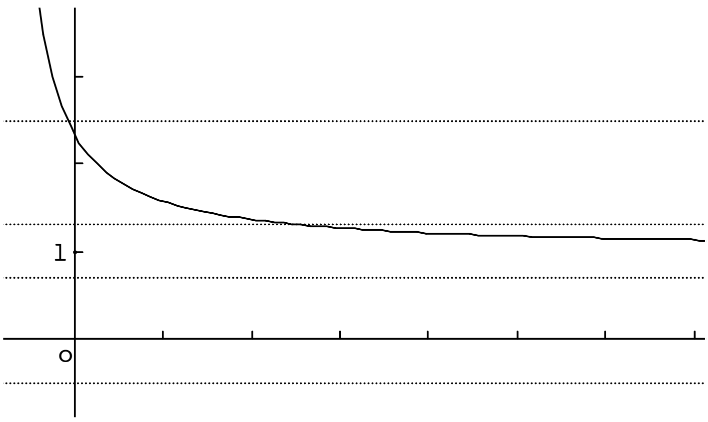
Fonctions : limites, continuité et dérivabilité

Rappels de cours

I. Limites de fonctions

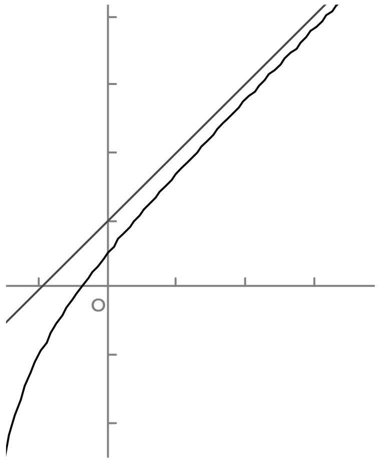
1. Quelques définitions

Définition : Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.



Définition : On dit qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]A\,;+\infty[$ (avec A réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

Définition : Soient a et b deux réels avec a non nul.
On dit que $D : y = ax + b$ est asymptote oblique à C, la courbe d'une fonction f, en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax+b) \right) = 0$.



Remarque : C est au-dessus de $D \Leftrightarrow f(x) > y$.
C est au-dessous de $D \Leftrightarrow f(x) < y$.
C se coupent quand $f(x) = y$.

Définition : Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que $D : x = a$ est asymptote verticale à C.

2. Opérations sur les limites

Théorème : Soient *l* et *l'* deux réels non nuls. Les limites des sommes, produits et quotients de deux fonctions sont donnés dans le tableau ci-dessous (attention : dans le cas des limites infinies, il faut utiliser la règle des signes pour savoir si c'est $+\infty$ ou $-\infty$).

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	l	l	0	$+\infty$	$+\infty$	∞	∞
$\lim_{x \to a} g(x)$	l'	∞	0	∞	$-\infty$	$+\infty$	0	l'
$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right)$	$l + l'$	∞	l	∞	F.I	$+\infty$	∞	∞
$\lim_{x \to a} f(x) \times g(x)$	$l \times l'$	∞	0	F.I	$-\infty$	$+\infty$	F.I	∞
$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	∞	0	F.I	F.I	∞	∞

A retenir : les cas de formes indéterminées sont « $+\infty - \infty$ », « $\infty \times 0$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ » (à ne pas écrire sur une copie).

3. Théorèmes de comparaison

Théorème des gendarmes : Soient *f*, *g* et *h* des fonctions et *l* un réel. On suppose que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour *x* suffisamment grand.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Théorème de comparaison : Soient f et g deux fonctions. On suppose que $f(x) \geq g(x)$ pour x suffisamment grand.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème de composition : Soient a, b et $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$ et f et g des fonctions.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} g(X) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$ (composition).

II. Continuité

Intuitivement, une fonction est continue lorsqu'on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.

Théorème des valeurs intermédiaire : Soient I un intervalle, f une fonction continue sur I et $a, b \in I$.
Soit k compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe au moins un réel $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

Théorème (cas des fonctions strictement monotones) : Soient a, $b \in \mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors pour tout réel $k \in [f(a) ; f(b)]$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[a ; b]$.

III. Dérivabilité

1. Nombre dérivé

Définition du nombre dérivé :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}.$$

Théorème : La tangente à une courbe au point d'abscisse a a pour équation :

$$\boxed{T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)}.$$

Théorème : Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

2. Règles de dérivation

Quelques formules :

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
$x^n, n \in N^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n, n < 0$	nx^{n-1}	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées :

$(u+v)' = u' + v'$; $(\lambda u)' = \lambda u'$;

$(u \times v)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (à condition que v ne s'annule pas).

Dérivation du fonction composée :

$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$;

$(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Dérivées successives : Si *f* est dérivable sur *I* et *f'* est dérivable sur *I*, on dit que *f* est deux fois dérivable et on appelle dérivée seconde de *f* la fonction $(f')'$ qu'on note f'' ou $f^{(2)}$.

Par itération, on peut définir la dérivée $n^{\text{ième}}$ de *f* par $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

3. Applications de la dérivation

Théorème : Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle *I*.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (sauf peut-être en quelques points) alors *f* est strictement croissante sur *I*.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ (sauf peut-être en quelques points) alors *f* est strictement décroissante sur *I*.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors *f* est constante sur *I*.

4. Etude de la fonction « tangente »

Quelques formules :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;

$\sin(a+b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;

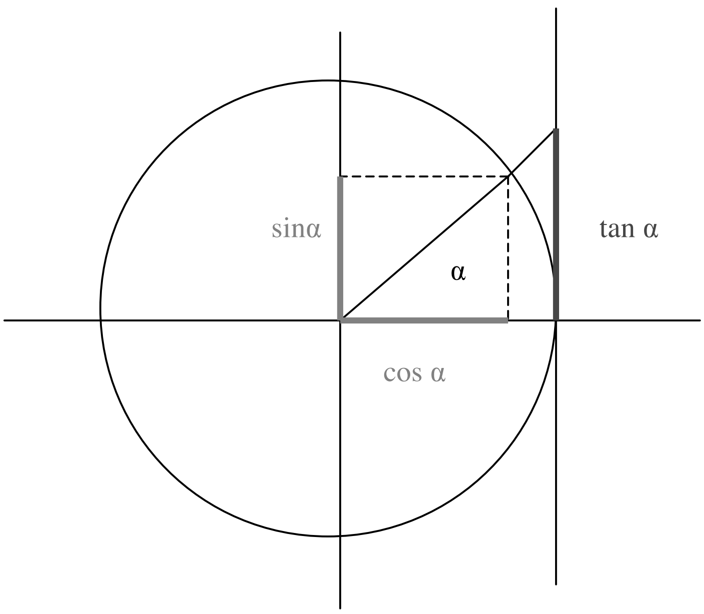
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$;

$\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

Définition : La fonction « tangente » est définie pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ par $\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$.

Interprétation sur le cercle trigonométrique :



Propriétés : tan est périodique de période π.

tan est impaire.

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

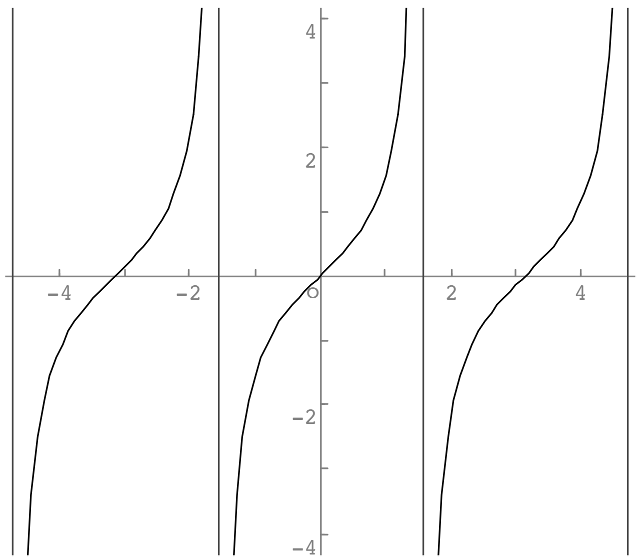
Dérivée : tan est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$\boxed{\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}}.$$

Tableau de variation sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ **:**

x	$-\pi/2$	$\pi/2$
$\tan'(x)$	$+$	
tan	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Courbe :



Exercices de base et d'oral

Exercice 1 : base

Calculer les limites suivantes, dont on admettra l'existence.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x+5}{-x^3+x+1}$;

2. $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{3x^2+2x-1}{3-x}$ et $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{3x^2+2x-1}{3-x}$;

3. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2x^2-x-6}{x-2}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x+1}$;

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x-2+\sin x)$;

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\dfrac{\pi x}{1-3x}$.

Exercice 2 : base

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, dont on ne cherchera pas à justifier la dérivabilité.

1. $f(x)=\dfrac{3x^2-x+1}{2x+1}$;

2. $g(x)=\sqrt{x^4+2}$;

3. $h(x)=3+\sin 2x+\cos 4x$;

4. $j(x)=\dfrac{5}{(3x^2+4)^6}$.

Exercice 3 : oral

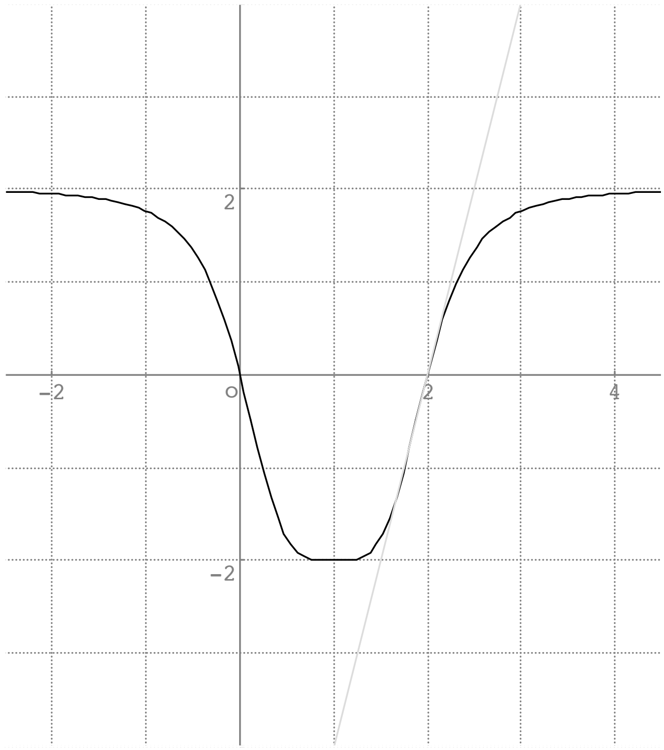
La courbe C donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Répondre aux questions par lecture graphique.

1. La courbe C admet-elle des asymptotes.

2. Etablir le tableau de variation de f.

3. Déterminer $f(2)$ et $f'(2)$. En déduire une équation de la tangente à C au point d'abscisse 2.
4. Discuter suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.



Exercice 4 : oral

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x - 1$.

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 100$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
4. Donner une valeur arrondie de α à 10^{-3} près.

Exercice 5 : base

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-4}$. On note C la courbe de f dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de D. Donner une interprétation graphique de ces limites.