

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Événements mesurables et probabilités</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	1
1.2	Algèbres d'événements . . . . .	2
1.3	Mesures additives . . . . .	5
1.4	Tribus et $\sigma$ -algèbres . . . . .	8
1.5	Mesures $\sigma$ -additives . . . . .	12
1.6	Problèmes . . . . .	15
1.7	Constructions de Probabilités . . . . .	17
1.7.1	Extensions de Mesures . . . . .	17
1.7.2	Mesures sur $\mathbb{R}$ . . . . .	18
1.7.3	Exemples . . . . .	19
1.7.4	Mesures sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	22
1.7.5	Mesures sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . . . . .	28
1.8	Appendice . . . . .	35
1.8.1	Preuve du Théorème de Carathéodory . . . . .	35
1.8.2	Preuve du Théorème de Lebesgue . . . . .	38
1.9	Correction des Exercices . . . . .	40
1.10	Correction des Problèmes . . . . .	51
<b>2</b>	<b>Théorie de l'intégration</b>	<b>55</b>
2.1	Introduction . . . . .	55
2.2	Fonctions mesurables . . . . .	56
2.2.1	Variables réelles . . . . .	56
2.2.2	Variables abstraites . . . . .	63
2.2.3	Une introduction à la simulation . . . . .	65
2.3	Intégrale de Lebesgue . . . . .	69
2.3.1	Définition . . . . .	69
2.3.2	Inégalités fonctionnelles . . . . .	72
2.3.3	Théorèmes limites . . . . .	74
2.3.4	Intégrale de Riemann . . . . .	78
2.3.5	Espaces produits . . . . .	79
2.3.6	Extensions . . . . .	82
2.3.7	Exercices . . . . .	83
2.4	Analyse de Fourier . . . . .	89
2.4.1	Définition et propriétés . . . . .	89
2.4.2	Exemples . . . . .	91
2.4.3	Semigroupes de convolution . . . . .	95
2.5	Correction des Exercices . . . . .	96

<b>3</b>	<b>Processus aléatoires</b>	<b>119</b>
3.1	Introduction . . . . .	119
3.2	Probabilités et Espérances conditionnelles . . . . .	121
3.2.1	Événements . . . . .	121
3.2.2	Décompositions . . . . .	124
3.2.3	Variables discrètes . . . . .	127
3.2.4	Variables absolument continues . . . . .	131
3.2.5	Tribus abstraites . . . . .	135
3.2.6	Processus aléatoires . . . . .	139
3.3	Chaînes de Markov discrètes . . . . .	140
3.3.1	Réalisation canonique . . . . .	143
3.3.2	Semigroupes de transitions . . . . .	143
3.3.3	Interprétation matricielle . . . . .	145
3.4	Applications . . . . .	149
3.4.1	Comportement en temps long . . . . .	149
3.4.2	Marches aléatoires . . . . .	156
3.4.3	Temps d'atteintes . . . . .	159
3.4.4	Chaînes évolutionnaires . . . . .	164
3.4.5	Problèmes . . . . .	167
3.5	Chaînes de Markov absolument continues . . . . .	177
3.5.1	Réalisation canonique . . . . .	177
3.5.2	Opérateurs de transitions intégraux . . . . .	178
3.5.3	Semigroupes intégraux . . . . .	178
3.5.4	Exemples . . . . .	179
3.6	Chaînes de Markov abstraites . . . . .	182
3.6.1	Semigroupe des transition . . . . .	183
3.6.2	Équation de Chapman-Kolmogorov . . . . .	184
3.7	Applications . . . . .	185
3.7.1	Fonctions itérées stochastiques . . . . .	185
3.7.2	Algorithme de Robbins-Monro . . . . .	187
3.7.3	Recuit simulé . . . . .	188
3.7.4	Filtrage de signaux radar . . . . .	190
3.8	Appendice . . . . .	191
3.9	Correction des Exercices . . . . .	197
3.10	Correction des Problèmes . . . . .	220
<b>4</b>	<b>Analyse et Géométrie</b>	<b>230</b>
4.1	Introduction . . . . .	230
4.2	Analyse asymptotique . . . . .	231
4.2.1	Convergence simple de variables aléatoires . . . . .	231
4.2.2	Convergence presque sûre et en mesure . . . . .	234
4.2.3	Les espaces $\mathbb{L}_p$ . . . . .	242
4.2.4	Méthodes de Monte-Carlo et lois des grands nombres . . . . .	244
4.2.5	Convergence en loi de mesures . . . . .	248
4.2.6	Résultats de convergence presque sûre . . . . .	266
4.3	Géométrie Hilbertienne . . . . .	272
4.3.1	L'espace $\mathbb{L}_2$ . . . . .	272
4.3.2	Projections orthogonales . . . . .	274

4.3.3	Orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	281
4.3.4	Conditionnement et formule de régression . . . . .	282
4.3.5	Filtre de Kalman-Bucy . . . . .	286
4.4	Systèmes gaussiens . . . . .	289
4.4.1	Quelques rappels d'algèbre . . . . .	289
4.4.2	Définition et propriétés . . . . .	291
4.4.3	Exercices . . . . .	294
4.4.4	Propriétés de conditionnement . . . . .	299
4.4.5	Estimation et problèmes de tests . . . . .	300
4.5	Correction des Exercices . . . . .	304
4.6	Correction des Problèmes . . . . .	323
	<b>Index</b>	<b>336</b>