Chapitre 1

Événements mesurables et probabilités

1.1 Introduction

Le hasard serait-il soumis à des lois mathématiques précises et rigoureuses ? Les phénomènes aléatoires pourraient-ils être maîtrisés par des modèles mathématiques ?

Peut-on analyser et prédire des évènements incertains et chaotiques, tels des catastrophes naturelles, des processus de ruines, des fluctuations quantiques, des variabilités génétiques ou démographiques de populations, des évolutions de files d'attentes dans des réseaux de télécommunication, ou encore des tendances de marchés financiers ?

Serait-il envisageable de dompter ces phénomènes aléatoires, et construire de nouveaux algorithmes numériques pour l'exploration d'espaces complexes de grandes dimensions, le calcul d'intégrales multiples, le traitement du signal radar ou sonar, l'analyse de risques et d'évènements rares, la décision et le contrôle optimal dans des environnements aléatoires ?

Ces questions philosophiques et scientifiques ont toutes des réponses positives ! Le hasard fait donc bien les choses ; mais pour l'apprivoiser, il nous faudra faire un peu de mathématiques sans rien laisser au hasard ! Bonne chance.

> *"Le génie est fait de un pour cent d'inspiration*
> *et de quatre-vingt dix neuf pour cent de transpiration."*
> *Thomas A., Edison (1847-1931)*

Pour commencer ce cours sur un brin d'histoire, il est intéressant de noter que la théorie des probabilités s'est initialement développée au début du XV-ième siècle, sur la base de l'expérience et de raisonnements intuitifs, appliqués la plupart du temps, à l'analyse des chances dans des jeux de dés ou de pile ou face. Les fondations mathématiques proprement dites sont nettement plus modernes. L'axiomatique présentée dans ce cours est en grande partie due à A.N. Kolmogorov au milieu du siècle dernier. Ce retard de développement est l'expression d'une pensée déterministe, peu constructive et peu imaginative, selon laquelle le hasard ne pourrait pas être soumis à des lois et à des règles mathématiques précises. La théorie des probabilités et des processus aléatoires connaît actuellement un essor considérable et constant, sous l'impulsion de problèmes issus de la physique des particules ou ondulatoire (interprétations microscopiques ou macroscopiques d'équations cinétiques de gaz et de fluides, analyse d'équations d'ondes dans des milieux aléatoires), de l'ingénierie mathématique (analyse de réseaux de télécommunications, de marchés financiers, d'évènements rares), ou de la biologie (étude de macromolécules, problèmes démographiques, évolution de population, séquençage d'ADN).

Cette première partie du cours porte sur les fondations, et l'interprétation événementielle, de la théorie de la mesure. Cette étape vers la théorie de probabilités et des processus aléatoires est directement liée à la théorie des ensembles et à la topologie. Nous étudierons tout d'abord les notions d'algèbres et tribus d'évènements. Ces classes ensemblistes représentent les phénomènes et les évènements mesurables. Les mesures de probabilités sont introduites comme des fonctions ensemblistes naturelles associant à chaque évènement un nombre entre 0 et 1.

"Si vous pouvez mesurer ce dont vous parlez,
et si vous pouvez l'exprimer par un nombre,
alors vous pouvez penser que vous savez quelque chose"
W. Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907)

1.2 Algèbres d'événements

La théorie de probabilités porte sur l'analyse d'événements aléatoires. Bien que totalement imprévisible, une expérience aléatoire est souvent associée à des caractéristiques empiriques précises. Dans le jet d'une pièce de monnaie, les côtés face et pile ont ainsi des fréquences de réalisations égales a $1/2$. Formellement, on se donne un espace Ω représentant l'ensemble des *événements élémentaires ou aléas* ω. Lorsque un aléa ω appartient à un sous ensemble $A \subset \Omega$, on dit que l'évènement A s'est produit. Dans l'exemple plus que réchauffé du lancer de dés, le sous ensemble

$$A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

représente l'évènement où l'*on observe un nombre pair*. Dans ce codage linguistique, les opérations ensemblistes usuelles de réunion $\cup$, d'intersection $\cap$, et de complémentarité $(\,.\,)^c$ sur un ensemble de parties $\mathcal{A}$ de Ω correspondent aux conjonctions "ou", "et", ainsi qu'à "la négation" sur la classe des événements correspondante. De plus, l'ensemble tout entier Ω correspond à l'évènement certain ; et l'ensemble vide $\emptyset$, à l'évènement impossible.

La stabilité, et la cohérence linguistique et logique, d'un système d'événements $\mathcal{A}$, associé à une expérience aléatoire donnée, correspond à la notion d'algèbre ensembliste.

Définition 1.2.1 *Une algèbre $\mathcal{A}$ sur Ω est une famille de sous-ensembles de Ω vérifiant les trois conditions suivantes*

1. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c = \Omega - A \in \mathcal{A}$.

2. *Ω (ou $(\Omega^c =)\emptyset) \in \mathcal{A}$.*
3. *$A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ (ou $((A^c \cup B^c)^c =) A \cap B \in \mathcal{A}$).*

Remarque 1.2.2 Au sens mathématique strict, le triplé $(\mathcal{A}, \cup, \cap)$ est plutôt un anneau de parties de Ω. Néanmoins, du fait de la grande similitude formelle entre les opérations $\cup, \cap$, et les règles d'addition et multiplication usuelles $+, .$, la plupart des probabilistes ont adopté cette notion d'algèbre d'événements. On notera que l'algèbre $\mathcal{A}$ sur Ω, correspond au plus petit sous ensemble de parties de Ω permettant de décrire d'un point de vue logique, tous les événements associés à une expérience aléatoire donnée. La correspondance entre les opérations $\cup, \cap, (.)^c$, et les conjonctions "ou", "et", et la "négation", nous permettent de décrire chacun des événements $A \in \mathcal{A}$, par une phrase grammaticale logique d'une *longueur finie*. En ce sens, une algèbre $\mathcal{A}$ représente les événements aléatoires pouvant être représentés, et expliqués dans le langage courant.

La liste non exhaustive suivante présente les principales algèbres utilisées dans la suite de ce cours.

Exemple 1.2.3 *L'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ formé de toutes les parties d'un ensemble Ω est manifestement une algèbre.*

Exemple 1.2.4 *Pour tout sous-ensemble $A \subset \Omega$, La famille des événements $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ est une algèbre sur Ω. On dit que $\mathcal{A}$ est l'algèbre engendrée par A. L'algèbre à deux éléments $\{\emptyset, \Omega\}$ est clairement la plus grossière des algèbres sur Ω. Cette petite algèbre est appelée algèbre triviale sur Ω.*

Exemple 1.2.5 *L'ensemble $\mathcal{A}$ formé des réunions finies*

$$A = \cup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$$

d'intervalles réels disjoints $(a_i, b_i]$, $-\infty < a_i \leq b_i \leq \infty$, $1 \leq i \leq n$, forme une algèbre sur $\Omega = \mathbb{R}$. On utilise la convention $(a, b] = (a, \infty] = (a, \infty)$, lorsque $b = \infty$, pour désigner l'intervalle ouvert, et fermé à droite, de $\mathbb{R}$. On remarquera ainsi que $(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, \infty) \in \mathcal{A}$, et

$$(a, b] \cap (c, d] = (\ a \vee c,\ \ b \wedge d\ ]$$

avec bien entendu la convention $(a, b] = \emptyset$, lorsque $a \geq b$.

Exemple 1.2.6 *On considère l'espace $\Omega = \mathbb{R}^n$ formé des séquences finies $\omega = (\omega_p)_{1 \leq p \leq n}$ de nombres réels. L'ensemble $\mathcal{A}$ formé des réunions finies*

$$A = \cup_{i=1}^{n} \{(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]\}$$

de pavés disjoints $\prod_{p=1}^{n} (a_p, b_p]$, avec $a_p < b_p \leq \infty$, $1 \leq p \leq n$, de $\mathbb{R}^n$, forme une algèbre sur $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 2$, on notera les formules

$$(I \times J) \cap (K \times L) = (I \cap K) \times (J \cap L)$$

et la formule de partitionnement

$$(I \times J)^c = (I^c \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times J^c)$$

valable pour tous sous les ensembles $I, J, K, L \subset \mathbb{R}$.

Exemple 1.2.7 *On considère l'espace* $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *formé suites* $\omega = (\omega_n)_{n\geq 0}$ *de nombres réels. On associe à chaque séquence d'intervalles* $I_n = (a_n, b_n]$*, avec* $a_n < b_n \leq \infty$*,* $n \geq 0$*, les ensembles cylindriques*

$$C(I_0 \times \ldots \times I_n) \quad = \quad \{\omega = (\omega_n)_{n\geq 0} \in \Omega \ : \ \omega_0 \in I_0, \ldots, \ \omega_n \in I_n\} \quad (1.1)$$

L'ensemble $\mathcal{A}$ *formé des réunions finies*

$$A = \cup_{i=1}^{m} C(I_0^i \times \ldots \times I_{n_i}^i)$$

de cylindres disjoints forme une algèbre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*.*

Exemple 1.2.8 *Si* $\mathcal{A}$ *est une algèbre sur un ensemble* Ω*, alors pour tout sous ensemble* $\Omega' \subset \Omega$*, l'ensemble*

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \Omega' = \{A \cap \Omega' \ : \ A \in \mathcal{A}\}$$

forme une algèbre sur Ω' *(muni de l'opération de complémentarité sur* Ω'*, en ce sens où* $(A \cap \Omega')^c = \Omega' - (A \cap \Omega') = \Omega' \cap A^c \in \mathcal{A}'$*). L'algèbre* $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \Omega'$ *est appelée la de l'algèbre* $\mathcal{A}$ *sur* Ω'*. On remarquera la formule de factorisation*

$$(A \cap \Omega') \cup (B \cap \Omega') = (A \cup B) \cap \Omega'$$

On obtient aussi immédiatement $\emptyset \cap \Omega' = \emptyset$*.*

Outre leur intérêt conceptuel, les algèbres d'ensembles portent par essence une information précise liée à une expérience aléatoire donnée. Toujours dans l'exemple brûlant du lancer de dés, l'algèbre

$$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$$

nous renseigne sur la parité (ou non) du résultat ; alors que l'algèbre

$$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$$

nous informe si le résultat est strictement inférieur (ou non) à 5. Dans un autre contexte, on notera que les espaces d'événements produits correspondent à des "successions" d'expériences aléatoires. Ainsi l'espace

$$\Omega = \{(i, j) \ : \ i, j = 1, 2, ..., 6\} = \{1, 2, ..., 6\}^2$$

est formé des couples d'aléas $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ représentant les résultats ω_1 et ω_2 de deux lancers de dés. De même, l'espace $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ représente des séquences infinies d'expériences aléatoires $\omega = (\omega_n)_{n\geq 0}$; telles des successions de jets de pile ou face, des séquences de lancers de dés, ou encore l'évolution aléatoire d'une particule sur la droite réelle. L'indice $n \in \mathbb{N}$ s'interprète comme le paramètre temporel. Dans cette situation, on remarquera que l'algèbre $\mathcal{A}_n$ formée des réunions finies des cylindres

$$C((a_0, b_0] \times \ldots \times (a_n, b_n]) = \{\omega \in \Omega \ : \ \omega_0 \in (a_0, b_0], \ldots, \ \omega_n \in (a_n, b_n]\}$$

décrit l'information liée à ces promenades aléatoires, entre l'instant initial et l'horizon temporel n. Ainsi, $\mathcal{A}_n$ ne contient *aucune information* sur le résultat de l'expérience aléatoire à l'instant $(n+1)$, sinon qu'il a pris une valeur réelle. On a par exemple

$$\begin{aligned} & C((a_0, b_0] \times \ldots \times (a_n, b_n]) \\ & = \{\omega \in \Omega \ : \ \omega_0 \in (a_0, b_0], \ldots, \ \omega_n \in (a_n, b_n], \ \omega_{n+1} \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

1.3 Mesures additives

Sur des espaces d'aléas finis Ω, il est naturel d'associer à chaque évènement élémentaire $\omega \in \Omega$ une probabilité $\mathbb{P}(\omega) \in [0,1]$ pour que ce dernier se réalise. Si par symétrie tous les $\mathbb{P}(\omega)$ sont égaux entre eux, on a nécessairement

$$\mathbb{P}(\omega) = 1/|\Omega| \qquad \text{où} \quad |\Omega| = \text{Card}(\Omega)$$

Ainsi, dans l'exemple du lancer de dés, on pose naturellement

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = \mathbb{P}(6) = 1/6$$

La probabilité pour qu'un évènement $A \subset \Omega$, plus complexe, se réalise, est alors la somme des probabilités de réalisation de chaque aléa qui le compose

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$$

Lorsque les événements élémentaires sont équiprobables, on a clairement

$$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega|$$

Toujours dans l'exemple du lancer de dés, nous avons

$$\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

L'évènement Ω étant certain, on s'assure que

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$$

Concernant l'évènement impossible $\emptyset$, on prend la convention $\sum_{\emptyset} = 0$, de sorte que $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{\omega \in \emptyset} \mathbb{P}(\omega) = 0$. L'analyse de probabilités uniformes sur des espaces finis Ω se résume donc au calcul de cardinaux d'ensembles. De tels calculs ont constitué pendant fort longtemps, l'essentiel du développement de la théorie des probabilités. Par ailleurs, l'analyse combinatoire d'événements reste encore de nos jours, un ingrédient essentiel du développement moderne de la physique statistique, et de l'analyse de polymères dirigés.

Les choses se compliquent dramatiquement lorsque l'ensemble des événements élémentaires Ω n'est plus dénombrable. Considérons l'exemple du choix d'un point au hasard dans $\Omega = [0,1]$. Dans ce cas, chaque aléa $\omega \in [0,1]$ est "équiprobable", et la condition de finitude $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) < \infty$, entraîne que chacun de ces aléa ω est nécessairement de probabilité nulle. Cette analyse ne conduit bien sur pas très loin ! Par contre, la probabilité de choisir un point au hasard dans $(0,1/2]$ est de $1/2$, et plus généralement celle de le choisir dans $(a,b] \subset [0,1]$ est de $(b-a)$. Autrement dit, on a

$$\mathbb{P}((a,b]) = (b-a) = \int_a^b dx \tag{1.2}$$

Par simple extension, on définit une classe importante de mesures de probabilités sur $\Omega = \mathbb{R}^n$ en associant à toute fonction positive

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty) \quad \text{telle que} \quad \int_{\mathbb{R}^n} p(x)dx = 1$$

la fonction d'ensemble $\mathbb{P}$ sur les pavés de $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$\mathbb{P}((a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]) = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} p(x_1, \ldots, x_n)\ dx_1 \ldots dx_n \qquad (1.3)$$

Les intégrales décrites ci-dessus sont définies au sens de Riemann usuel. Plus tard dans ce cours, nous développerons un procédé plus général d'intégration au sens de Lebesgue, sur des espaces abstraits.

La discussion précédente montre qu'il est nettement plus judicieux de bâtir la définition d'une probabilité sur une algèbre d'événements, plutôt que sur chacun des événements.

Définition 1.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'ensembles sur un ensemble Ω. Une mesure de probabilité additive est une application*

$$\mathbb{P}\ :\ A \in \mathcal{A} \mapsto \mathbb{P}(A) \in [0,1]$$

telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, et pour tout couple $A, B \in \mathcal{A}$ on a

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Définition 1.3.2 *Un modèle probabiliste est un triplé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{A}$ est une algèbre sur un ensemble Ω, et $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ une mesure de probabilité additive.*

Exercice 1.3.3 *Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ on a*

1. $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B - A) + \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(A)$
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$ *où $A \triangle B$ désigne la différence symétrique*

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

Ce modèle probabiliste est malheureusement trop grossier pour analyser des phénomènes aléatoires plus complexes, s'exprimant en terme de réunions ou intersections dénombrables d'événements de l'algèbre $\mathcal{A}$.
Comment étendre une fonction définie sur des pavés de $\mathbb{R}^n$ à d'autres régions, telles des boules, des singletons, ou des espaces délimités par des lacets ? Illustrons cette remarque en reprenant l'exemple du choix d'un point au hasard sur $[0,1]$. Cette expérience aléatoire se déroule sur l'intervalle $[0,1]$, et la probabilité de choisir ce point dans un intervalle $(a,b] \subset [0,1]$, est donnée par la formule (1.2). Plus généralement, la probabilité de choisir ce point dans un ensemble $A = \cup_{i=1}^n (a_i, b_i]$, réunion finie d'intervalles disjoints $(a_i, b_i] \subset [0,1]$, est égale à

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n (a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^n\ (b_i - a_i)$$

On construit ainsi aisément la probabilité $\mathbb{P}$ sur l'algèbre $\mathcal{A}$ sur $[0,1]$, formée des traces sur $[0,1]$ de réunions finies d'intervalles disjoints de la forme $(a,b] \subset \mathbb{R}$. Peut-on définir la probabilité pour que ce point soit choisi dans le discontinuum de Cantor. Cet évènement est-il mesurable ? Le discontinuum de Cantor est un sous ensemble de $[0,1]$, construit récursivement façon suivante. A l'étape

$n = 1$, on découpe $[0, 1]$ en trois intervalles de longueur $1/3$, et l'on conserve le segment central

$$[0, 1/3] \qquad B_1 = (1/3, 2/3] \qquad (2/3, 1]$$

A l'étape $n = 2$, on découpe à nouveau les deux autres segments extrêmes obtenus à l'étape précédente en trois intervalles de longueur $1/3^2$,

$$\begin{array}{rcl} [0, 1/3] & = & [0, 1/9] \cup (1/9, 2/9] \cup (2/9, 1/3] \\ (2/3, 1] & = & (2/3, 7/9] \cup (7/9, 8/9] \cup (8/9, 1] \end{array}$$

A cette seconde étape, on conserve les deux segments centraux

$$B_2 = (1/9, 2/9] \cup (7/9, 8/9]$$

En itérant ce procédé, on obtient à l'étape n, 2^{n-1} intervalles disjoints de longueur $1/3^n$. On note B_n l'union de ces derniers. Le complémentaire B^c de la réunion $B = \cup_{n\geq 1} B_n$ est appelé *le discontinuum de Cantor*. L'évènement "le point choisit au hasard sur $[0, 1]$ appartient à B"est il mesurable ? Comment définir, et calculer sa probabilité ?

Dans un autre contexte, l'évolution aléatoire d'une particule sur $\mathbb{R}$ est associée à une séquence infinie d'expériences aléatoires $\omega = (\omega_n)_{n\geq 0} \in \Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dans cette situation, l'algèbre des cylindres introduite dans l'exemple 1.2.7 permet de décrire des événements uniquement sur des horizons de temps finis. Comme nous l'avons déjà noté, le cylindre

$$C((a_0, b_0] \times \ldots \times (a_n, b_n]) = \{\omega \in \Omega \ : \ \omega_0 \in (a_0, b_0], \ldots, \ \omega_n \in (a_n, b_n]\}$$

correspond à l'évènement où la particule visite successivement les intervalles $(a_p, b_p]$, aux instants $p = 0, \ldots, n$. Nous reviendrons plus en détail sur ces évolution aléatoires,

$$\omega_0 \rightsquigarrow \omega_1 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \omega_n \rightsquigarrow \omega_{n+1} \rightsquigarrow \ldots$$

lorsque nous aborderons la notion de processus aléatoires. Il est néanmoins important de noter que la donnée d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur cette algèbre cylindrique est insuffisante pour comprendre le comportement en temps long de telles évolutions. Comment raffiner nos algèbres d'événements, et comment étendre les mesures de probabilités, pour mesurer qualitativement et quantitativement les événements asymptotiques suivants ?

- $A = \{\omega \ : \ \limsup_{n\to\infty} \omega_n \geq a\}$, $A' = \{\omega \ : \ \limsup_{n\to\infty} \omega_n > a\}$.
- $B = \{\omega \ : \ \liminf_{n\to\infty} \omega_n \geq a\}$, $B' = \{\omega \in \Omega \ : \ \liminf_{n\to\infty} \omega_n > a\}$.
- $C = \{\omega \ : \ \lim_{n\to\infty} \omega_n = a\}$, $D = \{\omega \ : \ \lim_{n\to\infty} \omega_n \quad \text{existe}\}$.
- $E = \{\omega \ : \ \limsup_{n\to\infty} \omega_n = \infty\}$.

Exercice 1.3.4 *Vérifier que les événements A, A', B, B', C, D, E décrits cidessus, s'expriment en terme d'un nombre dénombrable de réunions, et intersections des ensembles cylindriques décrits dans l'exemple 1.2.7.*

1.4 Tribus et σ-algèbres

Pour répondre aux questions posées à la fin de la section précédente, nous sommes amenés à travailler sur des systèmes d'événements plus fins, stables par intersections et réunions dénombrables.

Définition 1.4.1 *Une tribu, ou σ-algèbre $\mathcal{F}$ sur Ω, est une algèbre de parties de Ω stable par réunions dénombrable ; autrement dit, telle que*

$$\forall (A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \qquad \cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{F} \qquad (\text{ou} \quad ([\cup_{n\geq 0} A_n^c]^c =) \cap_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{F})$$

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est alors appelé un espace mesurable . Les ensembles $A \subset \mathcal{F}$ sont dit mesurables par rapport a $\mathcal{F}$.

Il existe une tribu contenant un ensemble de parties $\mathcal{A}$, et contenue dans toute tribu contenant $\mathcal{A}$. Cette tribu est appelée la tribu engendrée par l'ensemble $\mathcal{A}$.

Définition 1.4.2 *La plus petite tribu contenant un ensemble de parties $\mathcal{A}$ de Ω, est notée $\sigma(\mathcal{A})$, et est appelée tribu engendrée par $\mathcal{A}$.*

Remarque 1.4.3 Pour poursuivre la discussion menée à la section précédente, les tribus $\mathcal{F}$ (engendrées par une algèbre $\mathcal{A}$) correspondent au plus petit sous ensemble de parties de Ω permettant de décrire, d'un point de vue mathématique, et ensembliste, tous les événements composés associés à une algèbre $\mathcal{A}$. Autrement dit, la tribu est formée de tous les événements aléatoires pouvant être expliqués et étudiés en langage ensembliste, par un nombre au plus dénombrable d'opérations. En ce sens, la tribu est le plus petit objet mathématique permettant de décrire une expérience aléatoire par des phrases grammaticales de *longueur infinie*.

Par ailleurs, nous montrerons dans le problème 1, à la page 15, que $\sigma(\mathcal{A})$ peut aussi être vue comme la plus petite algèbre (contenant $\mathcal{A}$) stable par limites monotones d'ensembles, c'est-à-dire

$$A_n \uparrow A \quad \text{ou} \quad A_n \downarrow A \Longrightarrow A \in \mathcal{A}$$

Exercice 1.4.4 *Vérifier la propriété de monotonie suivante*

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \Longrightarrow \sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$$

et montrer que pour toute tribu $\mathcal{F}$ on a

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{A}) \Longrightarrow \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$$

Exercice 1.4.5 *Soient A_n une suite de sous ensembles de Ω. Les limites supérieures et inférieures de cette suite sont définies par*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\geq 0} \cap_{m\geq n} A_m \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\geq 0} \cup_{m\geq n} A_m$$

1. *Vérifier que $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ ssi ω appartient à tous les A_n sauf à un nombre fini. De même, montrer que $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ ssi ω appartient à un nombre infini de A_n.*