

Table des matières

1	Balades de Cauchy. Théorèmes fondamentaux	13
1.1	Rappels de définitions	13
1.1.1	Sur les chemins de \mathbb{C}	13
1.1.2	Intégrale d'une fonction sur un chemin c.d.m	17
1.1.3	Intégration sur un chemin cdm généralisé	26
1.2	Holomorphicité et analyticité	27
1.2.1	Définitions relatives à l'holomorphicité	27
1.2.2	Exemples de fonctions holomorphes	28
1.2.3	Opérations sur les fonctions holomorphes	28
1.2.4	Interprétation géométrique	29
1.2.5	Conditions de Cauchy dans d'autres coordonnées	30
1.3	Enoncés des théorèmes de Cauchy	34
1.3.1	Exemples préliminaires	34
1.3.2	Premier théorème de Cauchy	35
1.3.3	Théorème fondamental de Cauchy	38
1.3.4	Fonctions définies par des intégrales ou des séries	39
1.3.5	Développement en série de Taylor	48
1.4	Singularités isolées. Théorème de Laurent	51
1.4.1	Exemples préliminaires	51
1.4.2	Développement de Laurent	52
1.4.3	Classification des points singuliers isolés	53
1.4.4	Exemples de points singuliers isolés	53
1.5	Théorème des résidus	54
1.5.1	Définition d'un résidu et calcul	54
1.5.2	Enoncé du théorème	56
1.6	Les fonctions logarithmes	56
1.6.1	Définition de fonctions <i>arguments</i>	56
1.6.2	Première définition de fonctions logarithmes	59
1.6.3	Deuxième définition de fonctions logarithmes	60
1.6.4	Propriétés des fonctions $[\log]_{\alpha}$	62
1.6.5	Définition de fonctions puissances à exposants non entiers	64

1.6.6	Propriétés des fonctions puissances	65
1.6.7	Fonctions produits de puissances	67
1.7	Etude d'autres fonctions	69
1.7.1	Les fonctions arctan z	69
1.7.2	Fonctions arccos	71
1.7.3	Fonctions arcsin	73
1.7.4	Fonctions hyperboliques inverses	73
1.8	Exercices sur le chapitre 1	74
2	Balades d'exploration de racines	87
2.1	Localisation des zéros d'une fonction	87
2.1.1	Principe des zéros isolés	87
2.1.2	Ensemble des zéros d'une fonction holomorphe	90
2.2	Nombre de zéros et de pôles dans Ω	90
2.2.1	Intégrales de f'/f sur des chemins de Jordan	90
2.2.2	Extension au cas où f est méromorphe	91
2.2.3	Cas où le chemin est un cercle	92
2.2.4	Théorème de Jensen	94
2.2.5	Exemples de localisation de zéros	97
2.3	Comparaison des zéros de deux fonctions	104
2.3.1	Propriété de Rouché	104
2.3.2	Applications à diverses propriétés générales	105
2.3.3	Propriété d'injectivité locale	106
2.3.4	Applications à des résolutions d'équations	108
2.4	Approximation des zéros d'une fonction	109
2.4.1	Etude de f' au voisinage d'un zéro simple de f	109
2.4.2	Description de l'algorithme de Newton	110
2.4.3	Exemple de mise en œuvre	111
2.5	Notions sur le prolongement analytique	112
2.6	Exercices sur le chapitre 2	113
3	Balades sur les chemins de Hankel	119
3.1	Prolongement de la fonction Γ	119
3.1.1	Prolongement dans le demi-plan à droite Π_d	119
3.1.2	Prolongement dans l'ouvert Ω_Γ	121
3.1.3	Prolongement de la fonction $z \mapsto \frac{1}{\Gamma^*(z)}$	122
3.1.4	Intégrales de type \mathcal{B} sur des chemins de Hankel	126
3.1.5	Utilisation de chemins croisés autour de 0 et 1	128
3.2	Notions sur la fonction hypergéométrique	133
3.2.1	Equation différentielle et développement en série	133
3.2.2	Méthode de résolution d'Euler	133
3.2.3	Prolongement de la fonction hypergéométrique	134
3.2.4	Prolongement de $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ à partir de h_2	136
3.3	Etude de la fonction de Riemann	137

3.3.1	Prolongement dans l'ouvert $\{\Re s > 1\}$	138
3.3.2	Prolongement dans l'ouvert $\{\Re s > 0, s \neq 1\}$	138
3.3.3	Prolongement méromorphe de ζ dans \mathbb{C}	140
3.4	Etude de l'exponentielle-intégrale	145
3.4.1	Définition de la fonction sur les réels	145
3.4.2	Prolongement de l'exponentielle intégrale	145
3.4.3	Deuxième méthode : Primitivation	146
3.5	Solutions de l'équation de Bessel	149
3.5.1	Fonctions de Bessel, introduction aux méthodes	149
3.5.2	Principe de la méthode de Laplace	150
3.5.3	Cas où le chemin choisi est un c.d.m fermé	152
3.5.4	Chemin entourant un seul point de branchement	153
3.5.5	Etude du cas où C entoure les deux points	155
3.5.6	Prolongements des solutions U_λ et V_λ	161
3.5.7	Modification des contours précédents	163
3.6	Fonctions de Hankel	164
3.6.1	Relation entre les fonctions $V_\lambda, V_\lambda^{(1+)}$ et $V_\lambda^{(-1-)}$	164
3.6.2	Relation entre les fonctions $U_\lambda, V_\lambda^{(1+)}$ et $V_\lambda^{(-1-)}$	165
3.6.3	Définition et expression des fonctions de Hankel	166
3.7	Exercices sur le chapitre 3	170
4	Balades calculatoires	187
4.1	Intégrales de fonctions rationnelles	187
4.1.1	Exemples de calculs	187
4.1.2	Formule générale	193
4.1.3	Calcul de certaines intégrales sur $[0, +\infty[$	194
4.1.4	Calculs d'intégrales de fonctions rationnelles conti- nues sur $[a, b]$	202
4.2	Calculs de valeurs principales d'intégrales	207
4.2.1	Convergence <i>en valeur principale</i> à l'infini	207
4.2.2	Convergence <i>en valeur principale</i> en $a \in \mathbb{R}$	209
4.3	Calculs d'intégrales trigonométriques	213
4.4	Intégrales de $R(x, e^{iax})$, R étant rationnelle	217
4.5	Intervention de points de branchement	223
4.5.1	Intégrale de $R(x) \ln x$, R étant rationnelle	223
4.5.2	Intégrales où interviennent deux logarithmes	228
4.5.3	Intégrales $\int_0^{+\infty} R(x, \ln x) dx$, R étant rationnelle	231
4.5.4	Intervention d'une fonction puissance	233
4.5.5	Intervention de deux fonctions puissances	237
4.5.6	Autres intégrales	239
4.6	Exercices sur le chapitre 4	242

5	Balades engendrant des séries	249
5.1	Principe des démarches	249
5.2	Calcul de certaines sommes finies	250
5.3	Développements de certaines fonctions	256
5.3.1	Utilisation de la fonction cotangente	256
5.3.2	Utilisation de la fonction Γ	264
5.4	Exercices sur le chapitre 5	272
6	Balades de Fourier, de Laplace et de Hilbert	277
6.1	Transformées de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	277
6.1.1	Calculs qui reviennent à des changements de variables	277
6.1.2	Transformation des fractions rationnelles	279
6.1.3	Calculs dans le cas d'autres fonctions	281
6.1.4	Transformation des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$	282
6.1.5	Formules explicites pour \mathcal{F} dans L^2	284
6.1.6	Calcul de la transformée d'une distribution valeur principale	289
6.2	Transformée de Laplace d'une fonction	294
6.2.1	Rappels de définitions	294
6.2.2	Exemples de calculs	296
6.2.3	Transformée d'une distribution <i>partie finie</i>	300
6.3	Transformée de Laplace inverse	306
6.3.1	Relation entre les transformations de Fourier et de Laplace	306
6.3.2	Formule d'inversion	306
6.3.3	Transformées inverses de fonctions rationnelles	310
6.3.4	Fonctions admettant des points de branchement	312
6.3.5	Intervention d'une infinité de points singuliers	319
6.3.6	Images inverses de logarithmes	322
6.4	Transformée de Hilbert	335
6.4.1	Rappels concernant la transformation de Hilbert	335
6.4.2	Exemples de calcul	335
6.4.3	Généralisation	340
6.5	Exercices sur le chapitre 6	344