Chapitre 1

Balades de Cauchy. Théorèmes fondamentaux

Ce chapitre donne les définitions essentielles et l'énoncé des théorèmes. Pour leurs démonstrations, on renvoie aux nombreux ouvrages qui traitent des fonctions complexes de la variable complexe. On donne, à la suite de ces énoncés, la définition des logarithmes et de certaines fonctions inverses et, à ce propos, quelques notions sur les points de branchement des fonctions multiformes qui apparaissent dans les inversions de certaines fonctions holomorphes, lesquelles font l'objet d'une étude plus générale dans le second chapitre.

1.1 Rappels de définitions

1.1.1 Sur les chemins de $\mathbb{C}$

Définitions et Propriétés

Définition 1.1. Un *chemin* de $\mathbb{C}$, dit aussi *chemin continu* est, d'une façon générale, une application continue γ d'un certain intervalle fermé $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, lequel est qualifié de *source du chemin*, vers $\mathbb{C}$.
On dit que ce chemin est continûment différentiable par morceaux (en abrégé, un $c.d.m$) si l'application est, en outre, pourvue d'une dérivée continue, sauf, peut-être en un nombre fini de points de l'intervalle source I en lesquels cependant les dérivées à droite et à gauche existent.
Dans le cas où la dérivée est continue sur l'intervalle source I, le chemin est continûment différentiable (en abrégé, un $c.d$).

Un chemin cdm généralisé, dit aussi *chemin sans fin* est une application continûment dérivable par morceaux d'un intervalle ouvert $]a, b[$ dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une application dont la restriction à tout intervalle fermé inclus dans $]a, b[$ est un chemin c.d.m. Un tel chemin est sans extrémités et son image peut présenter des branches infinies.

En place de chemin, on dira indifféremment courbe ou arc ou même contour. Dans beaucoup de cas, on prendra soin de ne pas confondre le chemin γ, qui est une application, avec son *image*, dite encore son *support*, notée $\mathrm{Im}(\gamma)$, qui est l'ensemble des points $\{\gamma(t) \backslash t \in [a, b]\}$, ensemble qui fournit le tracé géométrique de la courbe dans le plan représentatif de $\mathbb{C}$ (cf. figure 1.1).

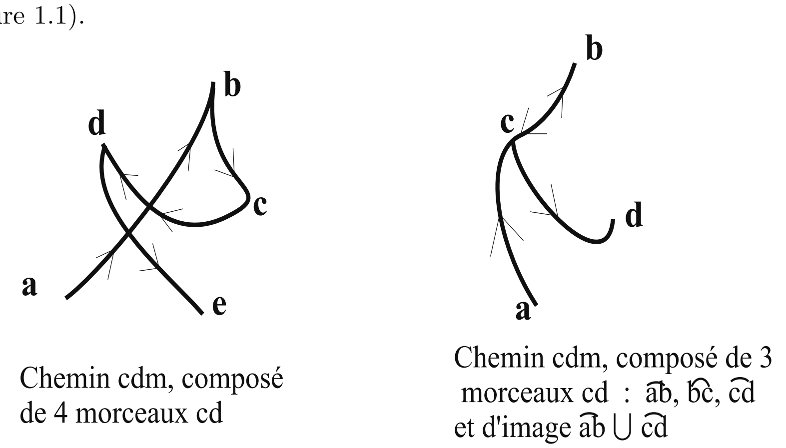

Figure 1.1 : Schéma de chemins c.d ou c.d.m

Donnons, pour l'instant, deux exemples très simples où on distingue l'application et l'image et où on voit qu'un chemin se trouve naturellement orienté (dans le sens des t croissant entre a et b).

Exemple 1.2. Définition de chemins dont l'image est un segment donné dans $\mathbb{C}$

Le segment joignant le point z au point z' est l'image du chemin continûment différentiable γ, dit *chemin droit* défini par

$$t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) = tz' + (1 - t)z.$$

Ce chemin est orienté de z vers z'. En échangeant z et z' dans la définition de γ, il serait orienté de z' vers z. Mais, si l'on considère une fonction φ croissante sur $[0, 1]$ d'image $[0, 1]$, le chemin défini par $\gamma^*(t) = \varphi(t)z + (1 - \varphi(t))z'$, qui est différent de γ, est aussi d'image le segment $[z, z']$. En fait, dans un calcul d'intégrale (cf. voir plus loin), l'un comme l'autre de ces chemins peut servir, pour, en quelque sorte, paramètrer le segment, le

passage de l'une des intégrales à l'autre résultant alors d'un changement de variables.
En revanche, soit une fonction φ non monotone sur $[0,1]$, toujours d'image $[0,1]$, par exemple $t \mapsto \varphi(t) = \frac{2}{3}\Big[t+\frac{1}{2}\sin\big(\frac{5\pi t}{2}\big)\Big]$. Le chemin $\gamma^*(t) = \varphi(t)z + (1-\varphi(t))z'$ admet encore pour image le segment $[z,z']$, mais il est facile de voir, après l'étude des variations de φ, que le trajet sur ce segment du point $\gamma^*(t)$ est composé de *retours en arrière*. Dans un tel cas, les intégrales d'une même fonction complexe sur γ et sur γ^* seraient différentes.
Dans la suite, en raison de sa simplicité et de son utilisation fréquente, on notera $\{[z,z']\}$, le chemin, qu'on pourra qualifier de *canonique*, défini par $t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) = tz' + (1-t)z$.
Notons qu'il est facile de définir un chemin continu et affine par morceaux, dont l'image est une ligne brisée composée d'un nombre fini de n segments $[z_j, z_{j+1}]$ où $j \in \{0, n-1\}$.

Exemple 1.3. Définition de chemins dont l'image est un arc de cercle

Le chemin défini par γ tel que :

$$t \in [0, \frac{5\pi}{2}] \mapsto \gamma(t) = z_0 + Re^{it}$$

a pour image le cercle de centre z_0 et de rayon R. Là aussi, on prend garde à ne pas confondre cette image avec le chemin, lequel correspond au cercle parcouru dans sa totalité plus un quart d'un autre tour dans le sens direct.
On utilisera fréquemment le chemin γ dit *cerclé canonique*, noté $\{C(z_0,R)\}$, défini sur $[0,1]$ par $t \mapsto z_0 + Re^{2i\pi t}$, dont l'image est le cercle $C(z_0,R)$ parcouru une fois en entier dans le sens direct.

Définition 1.4. Un chemin $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ est dit un *chemin fermé* ou un *lacet* si son origine est identique à son extrémité, autrement dit si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Il est qualifié de *simple* si son image ne présente aucun point double. Si le chemin est non fermé, cela signifie que, si t et t' appartenant à $[a,b]$, on a l'implication $\gamma(t) = \gamma(t') \Rightarrow t = t'$ et, si le chemin est fermé, cela signifie que $\gamma(t) = \gamma(t')$ implique, soit $t = t'$, soit $\{t,t'\} = \{a,b\}$. Un chemin simple et fermé, orienté dans le sens direct, est aussi appelé *chemin de Jordan*.
Au cours de l'ouvrage, de tels chemins seront supposés, en outre, des c.d.m. Ainsi, il est implicitement admis que les lacets ou les chemins de Jordan seront cdm et orientés dans le sens direct.

Les chemins simples et fermés de $\mathbb{C}$ peuvent définir certaines régions dont l'existence et les propriétés ne posent, intuitivement du moins, aucune difficulté :

Proposition 1.5. *Soit un chemin de Jordan γ. Alors, il existe un ouvert borné, noté* $\mathrm{Int}(\gamma)$*, un ouvert non borné, noté* $\mathrm{Ext}(\gamma)$*, tels que les trois* *ensembles* $\mathrm{Int}(\gamma)$, $\mathrm{Ext}(\gamma)$ *et l'image* $\mathrm{Im}(\gamma)$ *constituent une partition de* $\mathbb{C}$. *L'ouvert* $\mathrm{Int}(\gamma)$ *est dit* intérieur *de* γ, *l'ouvert* $\mathrm{Ext}(\gamma)$ *est dit* l'extérieur *de* γ.

Cette proposition est admise.

Définition 1.6. Un ouvert U de $\mathbb{C}$ est dit *connexe* si on ne peut trouver deux ouverts non vides disjoints V et W tels que $U = V \cup W$. Il revient au même de dire qu'étant donnés deux points quelconques z_0 et z_1 de U, il existe un chemin continu affine par morceaux d'image (ligne brisée) contenue dans U, d'origine z_0 et d'extrémité z_1.
Un ouvert connexe U est dit *simplement connexe* si tout chemin de Jordan γ tel que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset U$ vérifie aussi $\mathrm{Int}(\gamma) \subset U$.

Opérations sur les chemins

Pour pouvoir parler d'opérations, même quand elles ne sont pas partout définies, il est bon de pouvoir définir l'égalité de deux chemins ; laquelle est ici appelée *équivalence*. Les exemples ci-dessus suggèrent la définition :

Définition 1.7. Soient deux chemins γ_j de source $[a_j, b_j]$, où $j \in \{1, 2\}$. Ces deux chemins sont dits équivalents s'il existe une application φ continue et strictement croissante de $[a_2, b_2]$ sur $[a_1, b_1]$, telle que les deux fonctions φ et son inverse φ^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ et telles que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.

Les deux opérations les plus importantes sont les suivantes :

Définition 1.8. Le chemin opposé de γ, de source $[a, b]$, est défini sur $[a, b]$, par γ^0 tel que $\gamma^0(t) = \gamma(a + b - t)$.

On peut vérifier que cette définition est cohérente avec la définition de l'équivalence, ce qui veut dire que, si γ est remplacé par un chemin équivalent μ, alors μ^0 est équivalent à γ^0.
On définit aussi la juxtaposition de deux chemins, opération qui n'est pas définie pour deux chemins quelconques :

Définition 1.9. Soient deux chemins γ_1 et γ_2, d'intervalles sources respectives $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ et tels que $\gamma_2(a_2) = \gamma_1(b_1)$. Le chemin γ *juxtaposé* de ces deux chemins, noté $\gamma_1 \vee \gamma_2$, est défini sur $[a_1, b_2 + b_1 - a_2]$ par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a_1, b_1]; \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{si } t \in [b_1, b_2 + b_1 - a_2]. \end{cases}$$

On vérifiera également la cohérence de cette définition avec celle de l'équivalence.
Remarquons que, si outre la condition $\gamma_2(a_2) = \gamma_1(a_1)$, les deux chemins sont tels que $\gamma_2(b_2) = \gamma_1(b_1)$, la juxtapostion $\gamma_1 \vee \gamma_2$ donne un chemin fermé, celui-ci n'étant pas nécessairement un chemin de Jordan.

On illustre cette juxtaposition dans la figure qui suit, avec trois chemins, le premier étant le segment canonique $\gamma_1 = \{[-3i, 2i]\}$, le deuxième étant γ_2^0, l'opposé du chemin γ_2 de source $[0,1]$ tel que $\gamma_2(t) = i - ie^{i\pi t}$ d'image un demi-cercle C_1, le troisième étant γ_3^0, opposé du chemin γ_3 de source $[0,1]$ tel que $\gamma_3(t) = -(3/2)i - (3/2)ie^{i\pi t}$ d'image un demi-cercle C_2. Le résultat, à savoir la lettre B, est dessinée ci-dessous :

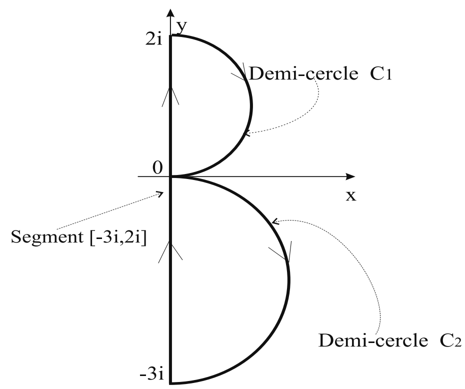

Figure 1.2 : Juxtaposition de trois chemins cdm

On trouve facilement une définition du chemin juxtaposé γ, par exemple défini sur $[0,3]$ par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2it - 3(1-t)i & \text{si } t \in [0,1]; \\ i - i\exp\left(i\pi(2-t)\right) & \text{si } t \in [1,2]; \\ -\dfrac{3i}{2} - \dfrac{3i}{2}\exp\left(i\pi(3-t)\right) & \text{si } t \in [2,3]. \end{cases}$$

1.1.2 Intégrale d'une fonction sur un chemin c.d.m

La notion qui va suivre est très proche de la notion d'intégrale curviligne. Une fonction qui sera l'objet de cette intégration est une fonction f continue sur l'ensemble compact, c'est-à-dire fermé et borné constitué par $\mathrm{Im}(\gamma)$, image du chemin considéré :

Continuité de f sur l'image d'un chemin

Dans le cas d'un tel compact, on remarque :

Proposition 1.10. *Soient un chemin continu γ, d'intervalle source I et une fonction f continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$, autrement dit, continue pour la topologie induite par celle de $\mathbb{C}$ sur $\mathrm{Im}(\gamma)$. Alors, la fonction $t \mapsto f(\gamma(t))$ est continue sur I. En revanche, cette dernière condition n'implique pas la continuité de f sur $\mathrm{Im}(\gamma)$.*

Preuve de la proposition 1.10.
♠ La propriété est immédiate par la composition des fonctions continues. Au passage, remarquons que cette propriété est en cohérence avec le remplacement de γ par un chemin équivalent (cf. définition 1.7).
Pour la réciproque, qui est fausse, considérons le chemin continu fermé défini par :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \gamma(t) = \exp{(4i\pi t)}.$$

Soit aussi la fonction f définie par $f(z) = [z]^{1/2} = |z| \exp{(\frac{i}{2}\arg(z))}$, avec $\arg(z) \in [0, 2\pi[$ (cf. définition des fonctions arguments dans la sous-section consacrée aux logarithmes). Cette fonction est continue sur le cercle $\mathrm{Im}(\gamma)$ privé de son point d'affixe 1 ; et discontinue en ce dernier point puisque $\lim_{z\to 1} f(z) = -1$ sur la partie du cercle situé dans le demi-plan inférieur.
Cependant, la fonction $t \mapsto f(\gamma(t))$, dont on voit qu'elle coïncide avec la fonction $t \mapsto \exp{(2i\pi t)}$ est continue. ♣

Remarque 1.11. Dans la plupart des cas, la fonction f sera continue dans un ouvert contenant l'image $\mathrm{Im}(\gamma)$. Bien entendu, il en résulte alors la continuité sur $\mathrm{Im}(\gamma)$.

Intégration sur un chemin c.d.m

Définition 1.12. Soit γ un chemin cdm quelconque, d'intervalle source I. Soit également une fonction f de la variable complexe, continue sur l'image $\mathrm{Im}(\gamma)$. Par définition, l'intégrale de f le long de γ est donnée par la formule :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_I f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Justification
Il faut remarquer que la fonction dérivée γ' n'est pas continue partout sur $[a,b]$. Mais elle est continue par morceaux sur $[a,b]$. L'intégrale du second membre de la formule précédente doit donc être interprétée comme une somme finie d'intégrales de la fonction continue $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ sur des sous-intervalles de $[a,b]$. On en déduit l'existence de $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$.
Examinons un cas particulier qui nous ramène à l'intégrale d'une fonction réelle continue sur un segment de $\mathbb{R}$. Supposons que γ soit le chemin canonique $\{[a,b]\}$, où a et b sont des réels donnés ($b > a$). Donc, sur $[0,1]$, on a $\gamma(t) = tb + (1-t)a$. Alors, l'intégrale de f sur I est donnée, grace au changement de variable réel $x = tb + (1-t)a$ par :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(tb + (1-t)a)(b-a)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

De façon plus générale, on vérifie la cohérence de la définition précédente avec celle de l'équivalence. Les notations utilisées sont celles de la définition 1.7. En utilisant chacun des sous-segments de type $[\alpha_2, \beta_2]$, d'images par φ, $[\alpha_1, \beta_1]$, sur lesquels les fonctions considérées sont continues et en notant qu'alors, on peut écrire $\gamma_2' = (\gamma_1' \circ \varphi).\varphi'$, on a, par le changement de variables $u = \varphi(t)$, la relation :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1 \circ \varphi)(t)(\gamma_1' \circ \varphi)(t).\varphi'(t)dt \\ &= \int_{\varphi(\alpha_2)}^{\varphi(\beta_2)} f(\gamma_1(u))\gamma_1'(u)du = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(u))\gamma_1'(u)du\end{aligned}$$

En additionnant toutes ces intégrales partielles, on obtient :

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Propriétés des intégrales sur des chemins

• D'après cette définition, les propriétés des intégrales de Riemann sur les segments de $\mathbb{R}$ s'étendent sans difficultés. En particulier, l'intégrale de f sur γ^0 est l'opposée de celle de f sur γ. En outre, si le chemin γ_2 est juxtaposable à γ_1, on a la formule de Chasles, à savoir :

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

• On peut définir la longueur d'un chemin par l'intégrale, là encore, d'une fonction continue par morceaux, à savoir $\mathrm{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$. Comme, par la définition du module, on a $|\gamma'(t)| = \sqrt{[\Re e\,(\gamma'(t))]^2 + [\Im m\,(\gamma'(t))]^2}$, on retrouve bien la définition habituelle d'une longueur, mais nous insistons encore, cette longueur n'est pas toujours la longueur géométrique de $\mathrm{Im}(\gamma)$, c'est plutôt la longueur du trajet parcouru par le mobile d'affixe $\gamma(t)$.

Majoration d'une intégrale

Dans ce qui suit, nous aurons besoin très souvent de la formule suivante :

Proposition 1.13. *Soit un chemin cdm quelconque γ dont l'image est incluse dans un ouvert où la fonction complexe f est continue. Alors :*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \mathrm{long}(\gamma) \sup_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f(z)|. \tag{1.14}$$

Preuve de la proposition 1.13.
♠ Il suffit de majorer l'intégrale sur $[a,b]$ par l'intégrale du module $|f(\gamma(t))||\gamma'(t)|$, lequel est inférieur à $\sup_{z\in \mathrm{Im}(\gamma)} |f(z)|$, l'intégrale restante, à savoir $\int_a^b |\gamma'(t)|dt$, étant la longueur de γ. ♣

Exemple 1.15. Soit l'intégrale d'une fraction rationnelle $f = \dfrac{P}{Q}$, où $\deg(P) \leqslant \deg(Q) - 2$, le long d'un demi-cercle de rayon R, centré en 0 et limité à ses points diamétraux sur l'axe des réels, laquelle intégrale est définie pour R assez grand. Alors, cette intégrale tend vers 0 lorsque $R \to +\infty$.

En effet, sur ce demi-cercle $C(R)$ placé par exemple dans le demi-plan supérieur, le polynôme P est majoré par la somme des modules $|a_k|R^k$ de ses termes. Le polynôme Q, de degré q, est minoré, pour R assez grand par $|b_q|R^q - \sum_0^{q-1} |b_k|R^k$. On en déduit, d'après la formule précédente :

$$\left|\int_{C(R)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz\right| \leqslant \pi R \frac{\sum_0^p |a_k|R^k}{|b_q|R^q - \sum_0^{q-1} |b_k|R^k}$$

A l'aide des hypothèses sur les degrés p et q, on voit que le majorant trouvé, qui est équivalent à KR^{p-q+1}, tend vers 0 lorsque $R \to +\infty$.

Changement de variable dans une intégrale sur un chemin

Soit donné un chemin cdm γ de source $[a,b]$ dont les parties réelle et imaginaire sont désignées par γ_1 et γ_2. Soit g une fonction définie le long de $\mathrm{Im}(\gamma)$, à laquelle on associe la fonction $\widetilde{g} = p + iq$ des variables réelles x et y telle que $g(x+iy) = p(x,y) + iq(x,y)$. On suppose que, en tout point $z = x + iy$ de cette image, les fonctions p et q sont continues et pourvues de dérivées partielles en x et en y continues. Alors, l'application composée $g \circ \gamma$ est bien définie et les fonctions composées $t \mapsto p(\gamma_1, \gamma_2)(t)$ et $t \mapsto q(\gamma_1, \gamma_2)(t)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$. Il en résulte que l'application $\widetilde{g} \circ \gamma$, notée aussi $\widetilde{g} \circ \gamma$ est un chemin cdm. Dans ces conditions, on a :

Proposition 1.16. *Soient γ un chemin cdm, une fonction g définie dans un ouvert U contenant $\mathrm{Im}(\gamma)$ et telle que $\widetilde{g}$ y soit continûment dérivable et enfin une fonction f continue sur l'image $\mathrm{Im}(g \circ \gamma)$. Dans cette situation, on a la formule du changement de variable :*

$$\int_\gamma (f \circ g) d\widetilde{g} = \int_{\widetilde{g} \circ \gamma} f(z) dz. \tag{1.17}$$