Banque PT 2012

Épreuve A

Question préliminaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que

$$f \circ g = g \circ f$$

Soit λ une valeur propre de f, $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé.
Montrer que le sous-espace $E_\lambda(f)$ est stable par g, c'est-à-dire que :

$$\forall\, x \in E_\lambda(f), g(x) \in E_\lambda(f)$$

Partie I

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1°) Montrer que f et g commutent.

2°) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f et g. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? Trigonalisables ?

3°) On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. En utilisant la question préliminaire, déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ soit stable par f et par g. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

Partie II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1°) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f.

2°) Soit $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$. On considère le polynôme P défini par

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

Soit u l'endomorphisme de E défini par $u = P(f) = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i f^i$

avec $f^0 = Id$ l'application identité de E, et pour $k \geqslant 1$, $f^k = f \circ \cdots \circ f$ est la $k^{\text{ème}}$ composée de f.

a) Montrer que f et u commutent.

b) Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

3°) On suppose dans cette question uniquement que $E = \mathbb{C}^5$. On note I_5 la matrice identité d'ordre 5. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres (éventuellement complexes) de A.

b) Trouver 5 nombres réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 tels que :

$$B = a_0 I_5 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4$$

c) En déduire les valeurs propres (éventuellement complexes) de B.

4°) On revient à un espace E général. Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

a) Quelle est la dimension de E_{λ_i}, sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?

b) En déduire, en se servant également de la question préliminaire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.

c) g est-il diagonalisable ?

d) On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré strictement inférieur à n et on considère l'application :

$$\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}^n, P \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$$

i) Vérifier que l'application φ est linéaire

ii) Vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.

iii) Montrer qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}, P(\lambda_i) = \mu_i$.

e) Déduire des questions précédentes qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $g = P(f)$.

5°) On considère la matrice $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale.

b) On cherche une matrice N telle que $N^2 = M$. Montrer en utilisant les résultats de la question **4°)** que si une telle matrice N existe, alors :

$\to$ $Q^{-1}MQ$ est diagonale.

$\to$ Il existe deux réels α et β tels que $N = \alpha I_2 + \beta M$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.

c) Déterminer toutes les matrices N vérifiant $N^2 = M$.

Partie III

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté muni d'un repère orthonormé direct (i, j, k). On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$ des vecteurs u et v.

1°) On considère la rotation r d'axe dirigé par le vecteur unitaire a et d'angle θ.

a) Rappeler l'expression générale de l'image $r(u)$ d'un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à a.

b) Montrer que tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique sous la forme $v = u + \lambda a$, avec a et u orthogonaux.

c) En déduire l'expression générale de l'image $r(v)$ d'un vecteur v quelconque de $\mathbb{R}^3$.

2°) On considère f la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y = 0$ et g la réflexion par rapport au plan d'équation $y + z = 0$.

a) Quelle est la nature de $f \circ g$? Préciser ses éléments caractéristiques.

b) Donner la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique.

c) Les endomorphismes f et g commutent-ils ?

d) Déterminer les valeurs propres (complexes) de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

3°) On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$.

Montrer que cet endomorphisme est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

4°) Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel strictement positif. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^3, \varphi(u) = u + \lambda\langle u, a\rangle a$$

a) Vérifier que φ est un endomorphisme.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'application φ est-elle une isométrie ?

c) Reconnaître alors φ.

Corrigé

Préliminaire

Soit $x \in E_{(\lambda)}(f)$. On a donc $f(x) = \lambda x$ et on considère le vecteur $y = g(x)$. Alors : $f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = \lambda y$.

Ainsi le vecteur y appartient encore à $E_{(\lambda)}(f)$ et :

$$x \in E_{(\lambda)}(f) \implies g(x) \in E_{(\lambda)}(f) : \boxed{E_{(\lambda)}(f) \text{ est stable par } g}$$

Partie I

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Question 1.

On a :

$$M_{\mathcal{B}}(f\circ g)=AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&-1\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-1&-3\\1&3&5\end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}(g\circ f)=BA=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&-1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-1&-3\\1&3&5\end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\boxed{f\circ g=g\circ f}$$

Question 2.

$$\star\ \chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&-\lambda&-1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(\lambda(\lambda-2)+1)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=(1-\lambda)^3.$$

Ainsi 1 est la seule valeur propre de A (ou de f) et si A était diagonalisable, A serait semblable à la matrice I_3, donc serait égale à I_3. Donc A n'est pas diagonalisable, mais son polynôme caractéristique étant $\mathbb{R}$-scindé, cette matrice est $\mathbb{R}$-trigonalisable.

De toutes façons, on nous demande de déterminer le sous-espace propre associé à 1, donc on fait le calcul, ce qui remontrera que A n'est pas diagonalisable :

$$(x,y,z)\in E_{(1)}(f)\iff f(x,y,z)=(x,y,z)\iff\begin{cases}x=x\\-z=y\\y+2z=z\end{cases}\iff y+z=0$$

Donc $E_{(1)}(f)$ est le plan d'équation $y+z=0$, que l'on peut engendrer par les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,1,-1)$.

$$\star\ \chi_B(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\-1&1-\lambda&-1\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}\underset{(L_3\leftarrow L_3+L_2)}{=}\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\-1&1-\lambda&-1\\0&2-\lambda&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\underset{(C_2\leftarrow C_2-C_3)}{=}\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\-1&2-\lambda&-1\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&0\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(-\lambda)$$

Donc $\operatorname{Spec} g=\{0,2\}$, puis :

$$(x,y,z)\in E_{(2)}(g)\iff\begin{cases}y+z=2x\\-x+y-z=2y\\x+y+3z=2z\end{cases}\iff\begin{cases}x+y+z=0\\-2x+y+z=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=0\\z=-y\end{cases}$$

$E_{(2)}(g)$ est la droite engendrée par $(0,1,-1)$

$$(x,y,z)\in E_{(0)}(g)\iff\begin{cases}y+z=0\\-x+y-z=0\\x+y+3z=0\end{cases}\iff\begin{cases}z=-y\\x=y-z=2y\end{cases}$$

$E_{(0)}(g)$ est la droite engendrée par $(2,1,-1)$

$\dim E_{(0)}(g) + \dim E_{(2)}(g) = 2 < 3$, donc g (ou B) n'est pas diagonalisable, mais comme χ_B est $\mathbb{R}$-scindé, B est $\mathbb{R}$-trigonalisable.

Question 3.

On prend $e_1 = (0, 1, -1)$ (ou tout vecteur non nul proportionnel à ce vecteur). On remarque que ce vecteur est dans le plan $E_{(1)}(f)$ et dans la droite $E_{(2)}(g)$, donc on choisit par exemple de prendre $e_2 = (1, 0, 0)$ et (e_1, e_2) est une famille libre.
On a :
$f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_2, g(e_1) = 2e_1$ et $g(e_2) = g(1, 0, 0) = (0, -1, 1) = -e_1$
(regardez la première colonne de B)

Soit alors e_3 n'importe quel vecteur tel que (e_1, e_2, e_3) forme une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
On vient de remarquer que l'on a :

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} ; M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Les valeurs des coefficients notés $*$ sont sans intérêt ici, puisque l'on voit que les matrices de f et g relativement à la base $\mathcal{B}'$ sont toutes deux triangulaires supérieures.

Partie II

Question 1.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit e_i un vecteur propre pour f, associé à la valeur propre λ_i.
Comme les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux-à-deux distincts, on sait que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre, donc une base de E : c'est dans le cours sous le nom : « condition suffisante de diagonalisabilité » :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

Question 2.

a) $\star$ $u \circ f = (\sum_{i=0}^{d} a_i f^i) \circ f = \sum_{i=0}^{d} a_i f^{i+1}$

$\star$ Comme f est linéaire : $f \circ u = f \circ (\sum_{i=0}^{d} a_i f^i) = \sum_{i=0}^{d} a_i f \circ f^i = \sum_{i=0}^{d} a_i f^{i+1}$

Bref :

$$\boxed{f \circ u = u \circ f : u \text{ et } f \text{ commutent}}$$

b) Reprenons la base construite en **1°**). On a : $\forall j \in [\![1, n]\!], u(e_j) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i(e_j)$.

Or $f(e_j) = \lambda_j e_j$, puis $f^2(e_j) = f(f(e_j)) = f(\lambda_j e_j) = \lambda_j f(e_j) = \lambda_j^2 e_j$, et par une récurence simple $\forall i \in \mathbb{N}, f^i(e_j) = \lambda_j^i e_j$ (même pour $i = 0$). Ainsi :

$$u(e_j) = \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_j^i e_j = P(\lambda_j) e_j$$

Donc, pour tout j, $u(e_j)$ est colinéaire à e_j, ce qui prouve que u est diagonalisable dans la base $\mathcal{B}$ qui a servi à diagonaliser f, et les valeurs propres correspondantes sont $P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)$.

[Attention, les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de f sont deux-à-deux distinctes, mais le polynôme P est quelconque, il n'y a donc aucune raison pour que les nombres $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$ soient encore deux-à-deux distincts.]

Question 3.

a) Pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$ (pour gagner de la place) et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_5 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ x_2 = \lambda x_3 \\ x_3 = \lambda x_4 \\ x_4 = \lambda x_5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_4 = \lambda x_5 \\ x_3 = \lambda x_4 = \lambda^2 x_5 \\ x_2 = \lambda x_3 = \lambda^3 x_5 \\ x_1 = \lambda x_2 = \lambda^4 x_5 \\ x_5 = \lambda^5 x_5 \end{cases}$$

Si $\lambda^5 \neq 1$, on a $x_5 = 0$, d'où $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ et $X = 0$, ce qui prouve que λ n'est pas valeur propre de A.
Si $\lambda^5 = 1$, *i.e.* $\lambda \in \{\exp(\frac{2ik\pi}{5}), 0 \leqslant k \leqslant 4\}$, x_5 est quelconque et les autres inconnues s'en déduisent. Le système admet donc des solutions non triviales (une droite de solutions) et λ est valeur propre de A.
Bref :

$$\boxed{\operatorname{Spec} A = \{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in [\![0,4]\!]\} = \mathbb{U}_5}$$

b) Relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$ de $\mathbb{C}^5$, A traduit l'endomorphisme u tel que $u(e_1) = e_2, u(e_2) = e_3, u(e_3) = e_4, u(e_4) = e_5$ et $u(e_5) = e_1$. Par conséquent il est facile de calculer les images par u^2 des vecteurs de base, puis celles par $u^3, \dots$ Ce qui donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(et $A^5 = I$) Ainsi :

$$\boxed{B = 5I_5 + A + 2a^2 + 3A^3 + 4A^4 = A + 2A^2 + 3A^3 + 4A^4 + 5A^5}$$

c) En posant $P = 5 + X + 2X^2 + 3X^3 + 4X^4$ ou $P = \sum_{i=1}^{5} iX^i$, le résultat de la question **2°) b)** montre que les valeurs propres de B sont les nombres $P(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}})$, pour k décrivant $[\![0,4]\!]$.
La question est : comme B a une forme très particulière, faut-il s'arrêter là ? Ou alors doit-on continuer les calculs ?

Pour $k = 0$, il vient $P(1) = 15$, qui était d'ailleurs une valeur propre évidente (c'est la somme de tous les éléments de chaque ligne).
Pour les autres valeurs de k, il est plus agréable d'utiliser le deuxième polynôme (mais le résultat est bien sur le même car avec $\lambda_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}$ on a $\lambda_k^5 = 1$)

$$(1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + 5X^4)(1 - X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 - 5X^5$$

Or pour $k \in [\![1,4]\!], 1+\lambda_k+\lambda_k^2+\lambda_k^3+\lambda_k^4 = \dfrac{1-\lambda_k^5}{1-\lambda_k} = 0$

Ainsi : $1+2\lambda_k+3\lambda_k^2+4\lambda_k^3+5\lambda_k^4 = \dfrac{-5\lambda_k^5}{1-\lambda_k} = \dfrac{-5}{1-\lambda_k}$

Donc $P(\lambda_k) = \lambda_k \times \dfrac{-5}{1-\lambda_k}$, et si on le veut on peut remplacer λ_k par son expression exponentielle, qui donne :

$$\forall\, k \in [\![1,4]\!] P(\lambda_k) = \frac{5\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{5}}}{2i\sin(\frac{k\pi}{5})}$$

[Finalement il n'est pas très intéressant de faire le calcul, mais on ne peut pas le savoir avant de le faire !]

Question 4.

a) f est un endomorphisme d'un espace de dimension n ayant n valeurs propres : on sait que f est diagonalisable (c'est la condition suffisante du programme) et que chaque sous-espace propre est de dimension 1.

b) Comme g commute avec f, la droite $\mathrm{Vect}(e_i)$, qui est un sous-espace propre de f, est stable par g, ce qui revient à dire que $g(e_i)$ appartient à la droite $\mathrm{Vect}(e_i)$, donc est de la forme $\mu_i e_i$, pour un certain nombre complexe μ_i.

c) La base $(e_1,\dots,e_n)$ est donc aussi formée de vecteurs propres pour g et g est diagonalisable.

d) i) Banal, car pour tous polynômes et tout scalaire :

$$\begin{aligned}\varphi(P_1+\lambda P_2) &= ((P_1+\lambda P_2)(\lambda_1),\dots,(P_1+\lambda P_2)(\lambda_n))\\ &= (P_1(\lambda_1),\dots,P_1(\lambda_n)) + \lambda(P_2(\lambda_1),\dots,P_2(\lambda_n))\\ &= \varphi(P_1)+\lambda\varphi(P_2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_{n-1}[X],\mathbb{C}^n)}$$

ii) Si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, par définition de φ, P s'annule aux points $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, ce qui fait n racines pour un polynôme dont le degré n'excède pas $n-1$. Il s'agit du polynôme nul.

iii) φ est linéaire, injective (car $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$), d'un espace de dimension n dans un espace de même dimension. Donc φ est bijective et :

$$\forall\,(\mu_1,\dots,\mu_n) \in \mathbb{C}^n, \exists! P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \varphi(P) = (\mu_1,\dots,\mu_n)$$

Ce qui traduit exactement le fait que :

$$\boxed{\forall\, i \in [\![1,n]\!], P(\lambda_i) = \mu_i}$$

e) Soit P le polynôme défini en **d) iii)**, il est bien de degré strictement inférieur à n et on a : $\forall\, i \in [\![1,n]\!], P(f)(e_i) = P(\lambda_i)e_i$ (vu en **2°) b)**)

Donc : $P(f)(e_i) = \mu_i e_i = g(e_i)$.

Donc les endomorphismes $P(f)$ et g coïncidant sur une base, on conclut :

$$\boxed{P(f) = g}$$

Question 5.

a) M est symétrique réelle, il existe donc bien une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale …

On a : $\chi_M = \begin{vmatrix} \frac{5}{2}-\lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$

Puis : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff 3x - 3y = 0$ et $E_{(1)}(M) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff 3x + 3y = 0$ et $E_{(4)}(M) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(on remarque que les deux sous-espaces propres sont bien orthogonaux)

Comme on veut que la matrice de passage diagonalisante soit orthogonale, il reste à normer les vecteurs propres utilisés et :

$$\boxed{\text{pour } Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on a } Q^{-1}MQ = {}^tQMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

b) Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $N^2 = M$, on a alors :

$$NM = NN^2 = N^3 = N^2N = MN$$

Donc N et M commutent et comme $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admet deux valeurs propres on sait depuis la question **4°) c)** que toute matrice Q diagonalisante pour M est diagonalisante aussi pour N :

$$\boxed{Q^{-1}NQ \text{ est diagonale}}$$

D'autre part, on sait aussi depuis **4°) e)** qu'il existe un polynôme de degré strictement inférieur à 2 tel que $N = P(M)$, donc :

$$\boxed{\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, N = \alpha I + \beta M}$$

c) $M = N^2 \iff Q^{-1}MQ = Q^{-1}N^2Q = (Q^{-1}NQ)^2$, et en posant $Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ cela s'écrit : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$

On obtient donc exactement 4 solutions, à savoir les matrices $Q\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix}Q^{-1}$, où ε_1 et ε_2 sont dans $\{-1, 1\}$, ce qui donne tous calculs faits les quatre matrices :

$$\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 & \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 & \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}}$$

Partie III

[Notons que nous allons travailler dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et donc lorsque l'énoncé parle de «repère» il doit vouloir parler de «base» et cela ne nuit en rien à la généralité de supposer que (i, j, k) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ce qui permet de ne pas distinguer liste des coordonnées et vecteur de $\mathbb{R}^3$.]

Question 1.

a) Posons $u' = a \wedge u$. La base (a, u, u') est orthogonale directe et de plus u et u' sont de même norme. Pour déterminer $r(u)$, tout se passe dans le plan (u, u') et on sait que l'on a alors : $r(u) = (\cos\theta)u + (\sin\theta)u'$ (faites un petit dessin !) :

$$\boxed{r(u) = (\cos\theta)u + (\sin\theta)a \wedge u}$$