

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Exemples introductifs</b>	<b>15</b>
1.1	Un processus absorbant discret : la licence . . . . .	15
1.2	Un processus absorbant continu : la double décroissance . . . . .	20
1.3	Un processus régulier discret : la succession forestière . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Evolution temporelle d'un processus de Markov</b>	<b>25</b>
2.1	Evolution moyenne . . . . .	25
2.2	Résultats pour les exemples introductifs . . . . .	26
2.3	Problèmes liés au pas de temps . . . . .	30
2.3.1	Choix du pas de temps . . . . .	31
2.3.2	Choix du nombre de pas . . . . .	31
2.4	Méthodes rapides de calcul de l'évolution temporelle . . . . .	33
2.5	Evolution aléatoire (Monte-Carlo) . . . . .	34
2.5.1	Tirage de la transition . . . . .	34
2.5.2	Tirage du temps de séjour . . . . .	36
2.6	Limites du calcul de l'évolution temporelle . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Taxonomie des chaînes de Markov</b>	<b>39</b>
3.1	Les états . . . . .	39
3.1.1	Taxonomie générale . . . . .	39
3.1.2	Les états périodiques . . . . .	40
3.1.3	Taxonomie à partir des matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}^\infty$ . . . . .	42
3.1.4	Accessibilité entre états . . . . .	42
3.2	Les classes . . . . .	43
3.2.1	Définition . . . . .	43
3.2.2	Accessibilité entre classes . . . . .	43
3.3	Les chaînes . . . . .	45
3.3.1	Taxonomie générale . . . . .	45
3.3.2	Réduction d'une chaîne . . . . .	46
3.3.3	Chaînes absorbantes . . . . .	47
3.3.4	Chaînes non-absorbantes . . . . .	48

3.3.5	Chaînes régulières . . . . .	49
3.3.6	Chaînes cycliques . . . . .	50
3.4	Dictionnaire . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Les chaînes de Markov absorbantes</b>	<b>53</b>
4.1	La matrice de transition $\mathbf{M}$ . . . . .	54
4.1.1	Forme canonique . . . . .	54
4.1.2	La matrice limite $\mathbf{M}^\infty$ . . . . .	55
4.2	Caractéristiques globales . . . . .	57
4.2.1	La matrice fondamentale $\mathbf{F}$ . . . . .	57
4.2.2	La matrice temps $\mathbf{T}$ . . . . .	58
4.2.3	Le vecteur temps d'absorption $\mathbf{t}$ . . . . .	59
4.2.4	La matrice dispersion des temps $\boldsymbol{\sigma}$ . . . . .	60
4.2.5	La matrice d'absorption $\mathbf{A}$ . . . . .	63
4.2.6	La matrice accession $\mathbf{E}$ . . . . .	65
4.2.7	La matrice récurrence ${}^l\mathbf{E}$ . . . . .	65
4.2.8	Le vecteur nombre d'états visités $\mathbf{v}$ . . . . .	68
4.2.9	Le vecteur temps de premier retour $\mathbf{r}$ . . . . .	69
4.2.10	La matrice temps de premier passage $\mathbf{D}$ . . . . .	70
4.2.11	La matrice dispersion des temps de premier passage $\boldsymbol{\sigma}_D$	71
4.2.12	Le vecteur quantité pondérée $\mathbf{q}$ . . . . .	71
4.2.13	Des caractéristiques globales aux caractéristiques parti- culières . . . . .	74
4.3	Caractéristiques effectives . . . . .	76
4.3.1	Le vecteur population transitoire initiale $\boldsymbol{\nu}$ . . . . .	76
4.3.2	Le vecteur temps effectif $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	76
4.3.3	Le temps d'absorption effective $\theta(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	77
4.3.4	La matrice dispersion des temps effectifs $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	77
4.3.5	Le vecteur d'absorption effective $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	78
4.3.6	Le vecteur accession effective $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	79
4.3.7	Le vecteur récurrence effective ${}^l\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	79
4.3.8	La quantité pondérée effective $\kappa(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	79
4.4	Caractéristiques conditionnelles . . . . .	81
4.4.1	Le vecteur population conditionnelle ${}_k\mathbf{n}(t)$ . . . . .	82
4.4.2	La matrice de transition conditionnelle ${}_k\mathbf{M}$ . . . . .	84
4.4.3	La matrice fondamentale conditionnelle ${}_k\mathbf{F}$ . . . . .	86
4.4.4	La matrice temps conditionnels ${}_k\mathbf{T}$ . . . . .	87
4.4.5	Le vecteur temps d'absorption conditionnel ${}_k\mathbf{t}$ . . . . .	88
4.4.6	La matrice dispersion des temps conditionnels ${}_k\boldsymbol{\sigma}$ . . . . .	89
4.4.7	La matrice d'absorption conditionnelle ${}_k\mathbf{A}$ . . . . .	90
4.4.8	La matrice accession conditionnelle ${}_k\mathbf{E}$ . . . . .	90

4.4.9	La matrice récurrence conditionnelle ${}^l_k\mathbf{E}$ . . . . .	91
4.4.10	Le vecteur quantité pondérée conditionnelle ${}_k\mathbf{q}$ . . . . .	92
4.5	Caractéristiques conditionnelles effectives . . . . .	93
4.5.1	Le vecteur population initiale conditionnelle ${}_k\boldsymbol{\nu}$ . . . . .	93
4.5.2	Le vecteur temps d'absorption conditionnel effectif ${}_k\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	94
4.5.3	Le temps d'absorption conditionnel effectif ${}_k\theta(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	94
4.5.4	Le vecteur dispersion des temps conditionnels effectifs ${}_k\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	96
4.5.5	Le vecteur d'absorption conditionnelle effective ${}_k\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	96
4.5.6	Le vecteur accession conditionnelle effective ${}_k\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	97
4.5.7	Le vecteur récurrence conditionnelle effective ${}^l_k\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	97
4.5.8	La quantité pondérée conditionnelle effective ${}_k\kappa(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	97
4.6	Caractéristiques passées . . . . .	99
4.6.1	La matrice temps de première arrivée $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	99
4.6.2	La matrice temps antérieurs $\tilde{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	101
4.6.3	Le vecteur temps de première arrivée $\tilde{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	104
4.6.4	Le vecteur temps antérieurs $\tilde{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	105
4.6.5	La matrice accession antérieure $\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	105
4.6.6	La matrice récurrence antérieure ${}^l\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	106
4.7	Alimentation en continu de la chaîne . . . . .	107
4.7.1	Introduction . . . . .	107
4.7.2	Le vecteur population à l'équilibre $\mathbf{n}_{\text{eq}}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	108
4.7.3	Le vecteur d'absorption à l'équilibre $\mathbf{a}_{\text{eq}}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	108
4.7.4	L'ancienneté à l'équilibre $\tilde{t}_{\text{eq}}(\boldsymbol{\nu})$ . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Applications des chaînes absorbantes</b> . . . . .	<b>111</b>
5.1	L'accumulation de métaux lourds dans la chaîne alimentaire . . . . .	111
5.2	Accumulation de l'iode dans la thyroïde . . . . .	116
5.3	Les retombées de Fukushima, ensembles ouverts . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Les chaînes de Markov régulières</b> . . . . .	<b>127</b>
6.1	Les chaînes régulières . . . . .	127
6.2	La distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ . . . . .	128
6.2.1	Définition . . . . .	128
6.2.2	Vitesse de convergence . . . . .	130
6.2.3	Simulation Monte-Carlo de la succession forestière . . . . .	132
6.3	Le vecteur temps de premier retour $\mathbf{r}$ . . . . .	133
6.4	La matrice temps de premier passage $\mathbf{D}$ . . . . .	134
6.5	La matrice des dispersions en temps de premier passage $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{D}}$ . . . . .	135
6.6	Le vecteur de pondération $\mathbf{w}$ . . . . .	136
6.7	Les chaînes réversibles . . . . .	136

6.7.1	Introduction . . . . .	136
6.7.2	La chaîne renversée $\tilde{\mathbf{M}}$ . . . . .	137
6.7.3	Les chaînes réversibles . . . . .	140
6.8	la matrice Google . . . . .	141
<b>7</b>	<b>Détermination expérimentale des probabilités de transition</b>	<b>147</b>
7.1	Les décroissances exponentielles . . . . .	147
7.1.1	L'activité d'un état . . . . .	149
7.1.2	Détermination de la période . . . . .	149
7.1.3	Détermination des probabilités de latence $M_{i i}$ . . . . .	151
7.1.4	Détermination des probabilités de transition $M_{i j}$ . . . . .	151
7.2	Détermination de $\lambda$ et $N_0$ à partir des données expérimentales .	152
7.2.1	Mesure complète de la décroissance . . . . .	152
7.2.2	Mesure partielle de la décroissance . . . . .	154
7.2.3	Détermination à partir des temps d'émission . . . . .	157
<b>Annexe A</b>	<b>Les bases de l'algèbre matricielle</b>	<b>161</b>
A.1	Notations . . . . .	161
A.2	Factorisation . . . . .	161
A.3	Addition . . . . .	162
A.4	Produit . . . . .	162
A.5	Produit de Hadamard . . . . .	162
A.6	La matrice nulle $\mathbf{0}$ . . . . .	163
A.7	La matrice identité $\mathbf{I}$ . . . . .	163
A.8	L'inverse d'une matrice $\mathbf{X}^{-1}$ . . . . .	163
A.9	La transposée d'une matrice $\mathbf{X}^t$ . . . . .	164
A.10	Diagonalisation d'une matrice . . . . .	164
A.11	Notations . . . . .	165
<b>Annexe B</b>	<b>Démonstrations</b>	<b>167</b>
B.1	Comment transformer un système d'équations linéaires du premier ordre en système matriciel . . . . .	167
B.2	Vie moyenne $T$ et demi-vie $T_{\frac{1}{2}}$ . . . . .	168
B.3	Méthode rapide pour calculer l'évolution temporelle . . . . .	169
B.4	Temps moyen dans un état, la période $T$ . . . . .	170
B.5	Tirage aléatoire du temps de séjour . . . . .	172
B.6	La matrice fondamentale . . . . .	173
B.7	Ecarts-types associés à la matrice temps . . . . .	174
B.8	Ecart-type associé au vecteur temps d'absorption . . . . .	176
B.9	La matrice accession . . . . .	177
B.10	La matrice récurrence . . . . .	177

B.11	Vecteur premier retour et matrice premier passage . . . . .	178
B.12	Ecart-types du vecteur quantités pondérées . . . . .	180
B.13	Ecart-types associés au vecteur temps effectifs . . . . .	181
B.14	Ecart-type associé au temps d'absorption effectif . . . . .	182
B.15	La matrice des transitions conditionnelles . . . . .	182
B.16	Les matrices conditionnelles . . . . .	183
B.17	Ecart-type associé aux quantités pondérées totales . . . . .	183
B.18	La matrice temps de première arrivée . . . . .	183
B.19	La matrice temps antérieurs . . . . .	185
B.19.1	La matrice accession antérieure . . . . .	186
B.20	Convergence à la distribution stationnaire . . . . .	186
B.20.1	Existence de la distribution stationnaire . . . . .	186
B.20.2	Unicité de la distribution stationnaire . . . . .	186
B.20.3	Convergence du vecteur population vers $\pi$ . . . . .	187
B.20.4	Expression de la matrice $\mathbf{M}^\infty$ . . . . .	188
B.21	La matrice temps de premier passage $\mathbf{D}$ et le vecteur temps de premier retour $\mathbf{r}$ . . . . .	189
B.22	La matrice $\tilde{\mathbf{M}}$ est une matrice de transition . . . . .	190
B.23	Distribution stationnaire du processus inverse . . . . .	191
B.24	Constance de la période . . . . .	191
B.25	Détermination du taux de transition . . . . .	192
B.25.1	Somme de taux . . . . .	192
B.25.2	Détermination à l'aide de la pente initiale . . . . .	193
B.25.3	Détermination à l'aide du maximum de vraisemblance . . . . .	193
B.25.4	Incertitudes . . . . .	195
<b>Annexe C Codes Matlab</b>		<b>197</b>
C.1	Evolution de la population à l'aide de la matrice de transition . . . . .	197
C.2	Evolution obtenue par la première méthode rapide . . . . .	198
C.3	Evolution obtenue par la seconde méthode rapide . . . . .	199
C.4	Evolution de la population par la technique de Monte-Carlo . . . . .	200
C.5	Evolution obtenue par tirages des temps dans les états . . . . .	201
C.6	Formalisme matriciel, chaînes absorbantes . . . . .	202
C.7	Formalisme matriciel, chaînes régulières . . . . .	205
C.8	Détermination des paramètres d'une décroissance exponentielle à partir de $N^{\text{dat}}(t)$ . . . . .	206
C.9	Détermination des paramètres d'une décroissance exponentielle à partir des $t_k$ . . . . .	208
<b>Bibliographie</b>		<b>211</b>
<b>Index</b>		<b>213</b>