Chapitre 1

Exemples introductifs

Dans ce chapitre, nous présentons trois exemples d'école correspondant aux différents types de chaînes de Markov étudiés dans ce livre. Notre objectif est d'introduire de manière simple les principales notions associées aux processus de Markov et de montrer à quels types de questions, liées à l'évolution temporelle d'un système, ce formalisme permet de répondre.

1.1 Un processus absorbant discret : la licence

Dans ce premier exemple [4], nous allons étudier l'évolution d'une cohorte, c'est-à-dire d'un groupe d'étudiants arrivés la même année, à travers les trois niveaux d'une licence. Ces trois niveaux sont des états, ils seront notés L_1, L_2 et L_3. Après le troisième niveau, les étudiants réussissant leurs examens obtiennent le diplôme de licence : ils ont atteint l'état D. Enfin, chaque année, les étudiants peuvent décider de quitter la licence. Ils se retrouvent alors dans l'état Q. Les étudiants peuvent également redoubler une fois, ou davantage, chaque niveau. Chaque année, les étudiants ont une probabilité p de passer dans le niveau supérieur, une probabilité q de quitter la licence et une probabilité r de redoubler. Pour simplifier la description, nous considérerons que les étudiants qui quittent la licence ne peuvent pas y revenir, que les probabilités p, q et r sont les mêmes chaque année et que le nombre de redoublements n'est pas limité [1]. La chaîne de Markov correspondante est montrée figure 1.1. Comme on peut le voir, la chaîne est composée d'états et de transitions d'état à état, chacune étant caractérisée par une probabilité. On peut également voir

1. On pourrait sans difficulté améliorer le réalisme de cette chaîne en attribuant des probabilités de transition différentes selon les niveaux, en ajoutant des états regroupant, par exemple, les étudiants en premier redoublement d'un niveau donné, les étudiants en année sabbatique, etc.

que la *chaîne* n'est pas nécessairement un ensemble linéaire de transitions, elle peut contenir des embranchements et même des cycles. Chaque année, les étudiants passent d'un état à un autre ou restent dans le même état. Quand un étudiant atteint l'état D ou l'état Q, la probabilité qu'il reste dans cet état l'année suivante est de 1. A la fin de chaque année, les seules possibilités pour un étudiant étant soit de passer au niveau suivant, soit de redoubler, soit de quitter le cursus ; on a donc $p + q + r = 1$. Nous aurions pu représenter sur le schéma les *boucles de latence*, c'est-à-dire des flèches recourbées reliant chaque état à lui-même avec la probabilité r pour les états L_i et 1 pour les états D et Q. Comme ces flèches n'apportent pas d'information, elles ne sont généralement pas représentées.

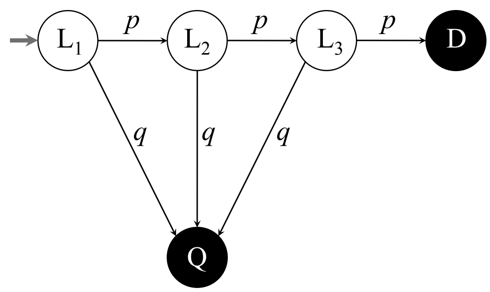

FIGURE 1.1 – Les 5 états et les 6 probabilités de transition pour la chaîne de Markov modélisant un parcours de licence simplifié. Dans ce schéma et les suivants, la petite flèche grise indique l'entrée, si elle existe, de la chaîne.

Considérons maintenant un étudiant entrant dans le cursus. Les questions qu'il se pose sont généralement de savoir quelle est la probabilité d'obtenir le diplôme et combien de temps il lui faudra en moyenne. Les réponses à ces questions ne sont pas simples à déterminer par les méthodes habituelles, car le diplôme peut être obtenu en suivant différents *chemins* (succession d'états) : en refaisant, éventuellement plusieurs fois, certains niveaux. Par exemple, si les probabilités sont les suivantes : $p = 0{,}7$, $q = 0{,}2$ et $r = 0{,}1$, on aurait tendance à penser que la probabilité d'obtenir la licence est plus grande que la probabilité de la quitter. En fait, comme nous le verrons, la probabilité de réussite est seulement de 47%. Le formalisme de Markov permet de répondre aux questions de l'étudiant, et à de nombreuses autres, de manière très simple et élégante.

La chaîne de Markov est constituée d'*états* et de *probabilités de transition*. Les étudiants sont les d'*éléments* qui évoluent dans cette chaîne. La chaîne par elle-même ne change pas d'année en année. Ce qui évolue sont les nombres, ou les proportions, d'étudiants présents dans chaque état. Ces nombres, ou ces proportions constituent le *vecteur population* $\mathbf{n}$. Dans notre cas, le vecteur population est : $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ D \\ Q \end{pmatrix}$ où L_i est le nombre d'étudiants dans le niveau L_i, D est le nombre d'étudiants ayant obtenu le diplôme, et Q le nombre d'étudiants ayant quitté le cursus. La somme des composantes du vecteur de la population est, bien sûr, une constante car les étudiants ne disparaissent pas. Pour cette raison, dans la plupart des cas, les composantes du vecteur sont divisées par la somme des composantes, de sorte que le vecteur contient des proportions et que sa somme est égale à 1. Les composantes peuvent alors être vues à la fois, comme la proportion d'étudiants dans chaque état ou alors comme la probabilité pour un étudiant donné d'être dans chacun des états.

Supposons que la répartition des étudiants l'année a est donnée par le vecteur $\mathbf{n}$ et que celle de l'année $a+1$ est donnée par le vecteur $\mathbf{n}'$, comment peut-on écrire les composantes de $\mathbf{n}'$ en fonction des composantes de $\mathbf{n}$? Considérons, par exemple, les étudiants qui sont dans l'état L_2 à l'année $a+1$. L'année précédente, soit ces étudiants étaient dans l'état L_1 et sont passés en L_2 avec une probabilité p, soit ils étaient déjà en L_2 et ils ont redoublé avec la probabilité r. On a donc, $L_2' = p\,L_1 + (1-p-q)\,L_2$. Suivant la même logique, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\begin{array}{lcrlrlrlll}
L_1' & = & (1-p-q) & L_1 & & & & & & \\
L_2' & = & p & L_1 + & (1-p-q) & L_2 & & & & \\
L_3' & = & & & p & L_2 + & (1-p-q) & L_3 & & \\
D' & = & & & & & p & L_3 + & D & \\
Q' & = & q & L_1 + & q & L_2 + & q & L_3 + & & Q
\end{array} \tag{1.1}$$

La première équation dit que la seule façon d'être dans le niveau L_1 à l'année $a+1$ est d'y être déjà l'année précédente et de redoubler, puisque nous ne considérons qu'une seule cohorte d'étudiants. Les deux dernières lignes montrent que les nombres d'étudiants dans les états D et Q ne peuvent qu'augmenter année après année, puisque les étudiants déjà présents dans ces états l'année a y seront toujours l'année $a+1$. Les termes dans le système d'équations (1.1) correspondant aux mêmes états sont alignés afin de montrer que ce système d'équations linéaires peut également être écrit en utilisant le formalisme matriciel [2] :

$$\mathbf{n}' = \mathbf{M}\ \mathbf{n}\,, \tag{1.2}$$

2. Si vous n'êtes pas familier avec l'algèbre matricielle, il est indispensable de lire l'Annexe A, pages 161 à 165, avant d'aller plus loin.

où :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1-p-q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1-p-q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 & 0 \\ q & q & q & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

est la *matrice de transition* aussi appelée matrice de Markov. On peut remarquer que la matrice $\mathbf{M}$ est constante, alors que $\mathbf{n}$ évolue année après année.

Ici, pour construire la matrice de transition, nous avons d'abord écrit le système d'équations linéaires (1.1). Habituellement, on ne s'y prend pas de cette façon. En effet, comme on peut le voir, la matrice $\mathbf{M}$ est composée de probabilités. Pour comprendre comment ces probabilités sont rangées, la matrice est réécrite ci-dessous avec l'indication des états correspondant aux lignes et aux colonnes :

$$\mathbf{M} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \mathrm{L}_1 & \mathrm{L}_2 & \mathrm{L}_3 & \mathrm{D} & \mathrm{Q} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1-p-q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1-p-q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{gray}{\boldsymbol{p}} & 1-p-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 & 0 \\ q & q & q & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{Q} \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{array}{ccccc} =1 & =1 & =1 & =1 & =1 \end{array} & \end{array} \tag{1.4}$$

Chaque ligne contient les probabilités d'aller à un état donné à partir des différents états. Par exemple, la dernière ligne contient les probabilités d'aller à l'état Q. Elle est composée de trois q qui sont les probabilités de passer d'un niveau de la licence à l'état Q, d'un 0 qui est la probabilité de passer de D à Q, et d'un 1 qui est la probabilité de rester dans l'état Q après y être entré. Les colonnes, quant à elles, contiennent les probabilités de quitter ou de rester dans un état donné. Par exemple, la première colonne, relative à L_1, est composée, de haut en bas, de $1-p-q$, qui est la probabilité de rester en L_1, de p qui est la probabilité de passer en L_2, de zéros qui indiquent l'impossibilité de sauter en L_3 ou d'obtenir directement le diplôme, et de q qui est la probabilité de quitter la licence. Comme on peut le voir, la somme des probabilités de quitter ou de rester dans un état donné est toujours 1 (ce qui est un bon moyen de vérifier que vos matrices de Markov ne contiennent pas d'erreurs). Pour construire la matrice directement à partir du schéma donné dans la figure 1.1, il suffit de la remplir par les probabilités de passer des états des colonnes aux états des lignes. Par exemple, le $\textcolor{gray}{\boldsymbol{p}}$ gris est la probabilité de passer de L_2 en L_3. Si, dans le schéma, il n'y a pas de flèche de l'état B à l'état A alors la probabilité de transition de B à A est nulle.

Les probabilités dont nous parlons sont dites *conditionnelles*. On ne considère pas simplement la probabilité d'aller dans l'état A, mais les probabilités d'aller en A sachant que l'on était en B l'année précédente. Les probabilités conditionnelles sont écrites de la manière suivante : $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ qui se lit « probabilité de A *tel que* B ». En outre, les composantes d'une matrice $\mathbf{X}$ sont, par convention, notées X_{ij} où le premier indice, i, est le numéro de la ligne et le second, j, est le numéro de la colonne. Par conséquent, les composantes de la matrice de transition seront notées $M_{i|j}$ dans ce livre. En utilisant cette notation, nous voyons, par exemple, que la composante $M_{\mathrm{L}_3|\mathrm{L}_2}$ est égale à p. L'ordre des indices n'est donc pas naturel puisque l'état initial est placé en second. Les composantes $X_{i|i}$ se trouvent sur la diagonale joignant l'angle en haut à gauche de la matrice à l'angle en bas à droite. On appelle donc ces termes la *diagonale*. Les composantes hors diagonale sont les probabilités de changer d'état. Elles apparaissent sur les flèches de la figure 1.1. La diagonale est constituée des probabilités de rester dans le même état. Elles sont égales à 1 moins la somme des autres probabilités de la colonne. Puisqu'on est capable de déterminer l'ensemble des composantes de la matrice $\mathbf{M}$, il n'était pas nécessaire d'écrire le système d'équations linéaires (1.1) : dans les applications pratiques, la matrice de transition est construite directement à partir du schéma du processus de Markov. Le schéma nous aide aussi à calculer facilement la probabilité P de *chemins* donnés, c'est-à-dire de successions d'états $(i_0, i_1, \dots i_m)$. La probabilité d'un chemin dépend de la probabilité d'être initialement dans l'état i_0, qui est égale à la i_0-ème composante du vecteur population initiale $\mathbf{n}(0)$, soit $n_{i_0}(0)$, et des différentes probabilités de transition d'état à état :

$$P(i_0, i_1, \dots i_m) = n_{i_0}(0)\, M_{i_1|i_0}\, M_{i_2|i_1}\, \dots\, M_{i_m|i_{m-1}}\,. \tag{1.5}$$

Par exemple, la probabilité pour un étudiant de commencer en L_1, de passer en L_2, de redoubler le L_2, de passer en L_3, puis de quitter le cursus est :

$$P = 1\, p\, r\, p\, q = 0{,}0098\,.$$

Ce type de chaîne décrit un processus de Markov *discret* puisque la population d'étudiants ne peut passer d'un état à un autre qu'en fin d'année, le *pas de temps* est donc $\Delta t = 1$ an. Nous allons nous intéresser maintenant aux processus à temps continu que nous appellerons processus continus.

1.2 Un processus absorbant continu : la double décroissance

La plupart des processus de Markov naturels ne respectent pas de pas de temps réguliers. Par exemple, une molécule de polluant rejetée par une usine dans une rivière peut être absorbée à tout moment par un poisson (dans ce cas, la rivière et le poisson sont des états et la population est constituée de molécules). De tels processus, dits *continus*, peuvent aussi être étudiés par le formalisme de Markov. Considérons, par exemple, une double décroissance radioactive. Le radium ^{226}Ra est un atome radioactif présent dans de nombreuses roches, notamment le granite. C'est un émetteur alpha, ce qui signifie que son noyau peut expulser une particule alpha composée de deux protons et de deux neutrons. Il se transforme alors en radon ^{222}Rn, qui est un gaz, et qui peut donc s'échapper de la roche dans l'atmosphère. Le radon est également radioactif. Il constitue la principale source de radioactivité naturelle à laquelle sont soumis les humains car il peut être inhalé. Le radon est aussi un émetteur alpha, d'où sa dangerosité lorsque l'alpha est émis dans le poumon. Il se transforme en polonium ^{218}Po. La décroissance continue après le polonium par une succession d'émissions radioactives jusqu'au plomb ^{206}Pb qui, lui, est stable. Nous n'allons considérer que trois états occupés par les noyaux : Ra, Rn et Po, ce dernier comprenant le polonium et ses successeurs.

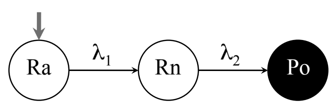

Figure 1.2 – La double décroissance radioactive.

On appelle *période*, T, le temps moyen qu'il faut à un élément pour changer d'état. La période du radium est de 2309 années, alors qu'il ne faut en moyenne que 5,5 jours à un noyau de radon pour décroître en polonium. Cela signifie que pendant une durée donnée, disons 1 an, la probabilité de transition d'un radium est faible car sa période est longue, alors que la probabilité de transition d'un radon est grande, très proche de 1, car sa période est courte devant un an. On caractérise donc la transition par l'inverse de sa période que l'on appelle *taux de transition* :

$$\lambda = \frac{1}{T}\,. \tag{1.6}$$

La transition de Ra à Rn a un taux de transition $\lambda_1 = 1/2309$ année^{-1}, et la transition de Rn à Po a un taux de transition $\lambda_2 = 1/5{,}5$ jour^{-1}. Il faut noter que les taux de transition sont des inverses de temps, c'est-à-dire des fréquences[3].

Considérons un pas de temps dt ; nous avons la propriété suivante :

Si la durée dt est très petite devant le temps $1/\lambda$, alors λ dt est la probabilité de transition durant dt.

On remarque que λ dt est bien sans dimension, comme le sont les probabilités. Si d$t = 1$ an, par exemple, la probabilité qu'un noyau donné de radium décroisse est de 1/2309. Cette valeur de dt ne serait pas valide pour le radon : en effet, dans ce cas, λ_2 d$t = 1/5{,}5$ jour^{-1} $\times$ 1 année $= 66$, qui bien évidemment ne peut être la valeur d'une probabilité. En fait, la probabilité qu'un atome donné de radon décroisse en moins d'un an est très proche de 1, puisque $1/\lambda_2$ est très petit comparé à un an. Pour exprimer la probabilité de transition de Rn à Po, nous devons considérer un pas de temps petit devant 5,5 jours, par exemple une heure. La probabilité de transition par heure est $P = 1/5{,}5$ jour^{-1} $\times$ 1 heure $= 0{,}0076$.

La double décroissance peut donc bien être représentée par une chaîne de Markov puisque nous avons des états (Ra, Rn, Po), une population constituée d'atomes évoluant d'état en état et de probabilités de transition $\lambda_1\,\mathrm{d}t$ et $\lambda_2\,\mathrm{d}t$. Sur la figure correspondante 1.2, on note que, dans le cas des processus continus, ce sont les taux de transition λ_i qui sont placés au-dessus des flèches plutôt que les probabilités $\lambda_i\,\mathrm{d}t$. Le formalisme mis en œuvre pour étudier les processus continus est le même que celui des processus discrets, mais le pas de temps dt doit être très petit par rapport à tous les temps jouant un rôle dans le processus. Dans notre exemple, dt doit être petit à la fois devant $1/\lambda_1 = 2309$ années et devant $1/\lambda_2 = 5{,}5$ jours. Dans les codes informatiques utilisés pour calculer les processus de Markov, on choisit habituellement un pas de temps égal à un centième de l'inverse du plus grand des taux de transition. Ici, ce serait d$t = 5{,}5/100$ jour. Nous reviendrons sur cette question dans le chapitre suivant. La matrice de Markov de la double décroissance est construite avec les probabilités d'aller d'un état à l'autre durant un petit pas de temps. A l'aide du schéma, on construit la matrice de transition donnée ci-dessous. On place d'abord la probabilité λ_1 dt qui correspond à la transition

3. Dans le cadre de la radioactivité uniquement, le taux de transition est appelé *constante radioactive*, et on préfère utiliser la *demi-vie* $T_{\frac{1}{2}}$ du noyau atomique plutôt que sa période. La demi-vie est le temps au bout duquel la moitié des noyaux radioactifs initiaux ont décru. Elle est reliée à la période par la formule suivante : $T_{\frac{1}{2}} = \ln(2)\,T$. Voir la démonstration page 168.

de Ra à Rn au croisement de la colonne Ra et de la ligne Rn. On procède de même pour la transition de Rn à Po avec la probabilité $\lambda_2\,\mathrm{d}t$. Les autres composantes en dehors de la diagonale sont nulles car elles ne correspondent pas à des transitions possibles. Enfin, on complète les termes de la diagonale qui sont égaux à 1 moins la somme des autres termes de la colonnes. On obtient :

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{Ra} & \mathrm{Rn} & \mathrm{Po} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-\lambda_1\,\mathrm{d}t & 0 & 0 \\ \lambda_1\,\mathrm{d}t & 1-\lambda_2\,\mathrm{d}t & 0 \\ 0 & \lambda_2\,\mathrm{d}t & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{Ra} \\ \mathrm{Rn} \\ \mathrm{Po} \end{array} \tag{1.7}$$

Par construction, la somme des termes de chaque colonne est égale à 1. Cette matrice pourrait aussi être composée en utilisant les équations différentielles qui décrivent la double décroissance, comme cela est montré en annexe page 167. Cette matrice de transition est utilisée de la même manière que celle des processus discrets à ceci près que le pas de temps est maintenant $\mathrm{d}t$. L'évolution temporelle de la population est donc donnée par :

$$\mathbf{n}(t+\mathrm{d}t) = \mathbf{M}\ \mathbf{n}(t)\,, \tag{1.8}$$

où $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} Ra \\ Rn \\ Po \end{pmatrix}$ est le vecteur population. Il contient les proportions de radium, de radon et de polonium. Par exemple, la deuxième ligne de l'équation (1.8) est $Rn(t+\mathrm{d}t) = Rn(t) + \lambda_1\,\mathrm{d}t\,Ra - \lambda_2\,\mathrm{d}t\,Rn$, ce qui signifie que durant le laps de temps $\mathrm{d}t$ le nombre de noyaux de radon a augmenté de $\lambda_1\,\mathrm{d}t\,Ra$ et décru de $-\lambda_2\,\mathrm{d}t\,Rn$. De manière générale, on appelle la somme des termes positifs, proportionnels à $\mathrm{d}t$, de l'équation le *taux de production* et la somme des termes négatifs le *taux de destruction*. Si les taux de production et de destruction sont égaux, alors la population reste constante.

1.3 Un processus régulier discret : la succession forestière

Dans les deux exemples précédents, si l'on attend suffisamment longtemps, tous les éléments de la population se retrouveront dans les états dits *absorbants* : Q et D dans le premier cas, Po dans le second. Un autre type de processus de Markov, appelé processus *régulier*, ne contient pas d'état absorbant. Les éléments vont évoluer d'état en état pendant une durée théoriquement infinie. Par exemple, des molécules d'eau s'évaporent de l'océan vers les nuages, tombent sur le sol sous forme de pluie, rejoignent une rivière et coulent vers l'océan, d'où elles pourront à nouveau s'évaporer. Il s'agit là d'une chaîne