## Table des matières

I Signaux temporels ..... 10
1 Introduction ..... 11
1.1 Définition d'un signal ..... 11
1.2 Classification des signaux ..... 11
1.2.1 Signaux continus et discrets ..... 11
1.2.2 Signaux déterministes et aléatoires ..... 12
1.3 Conclusions et extensions ..... 15
2 Signaux déterministes à temps continu ..... 16
2.1 Représentation temporelle ..... 16
2.2 Transformations et représentation fréquentielle (rappels) ..... 17
2.2.1 Représentation d'un signal périodique par une série de Fourier ..... 17
2.2.2 Transformation de Fourier ..... 19
2.2.3 Transformation de Laplace ..... 22
2.2.4 Lien entre transformées de Fourier et Laplace ..... 22
2.3 Filtrage (rappels) ..... 22
2.3.1 Définitions ..... 22
2.3.2 Propriétés des filtres ..... 23
2.4 Energie, puissance, corrélation ..... 26
2.4.1 Energie et puissance en représentation temporelle ..... 27
2.4.2 Propriétés des signaux à énergie finie ..... 28
2.4.3 Propriétés des signaux à puissance moyenne finie ..... 38
2.5 Conclusions et extensions ..... 41
2.6 Annexe A : grandeurs liées à l'énergie et la puissance ..... 41
2.7 Annexe B : signe du coefficient de corrélation ..... 42
3 Probabilités ..... 43
3.1 Définitions ..... 43
3.2 Opérations sur les événements ..... 44
3.3 Tribu ..... 44
3.4 Espaces probabilisables et probabilisés ..... 46
3.5 Approche fréquentiste de la probabilité ..... 46
3.6 Diagramme de Venn, masse de probabilité ..... 47
3.7 Propriétés des probabilités ..... 48
3.8 Probabilité conditionnelle, théorème de Bayes ..... 50
3.8.1 Probabilité conditionnelle ..... 50
3.8.2 Théorème de la probabilité totale ..... 52
3.8.3 Théorème de Bayes ..... 53
3.9 Indépendance ..... 53
3.9.1 Cas de 2 événements ..... 53
3.9.2 Cas de $m$ événements ..... 54
3.10 Conclusions et extensions ..... 54
4 Variable aléatoire réelle unique ..... 55
4.1 Définition et caractérisations d'une variable aléatoire ..... 55
4.1.1 Motivation ..... 55
4.1.2 Définition d'une variable aléatoire réelle ..... 56
4.1.3 Loi de probabilité ..... 58
4.1.4 Fonction de répartition ..... 58
4.1.5 Variables aléatoires discrètes et continues, densité ..... 66
4.1.6 Caractéristiques expérimentales correspondantes ..... 71
4.1.7 Exemples importants de variables aléatoires ..... 73
4.1.8 Fonction de répartition et densité conditionnelles ..... 79
4.2 Fonctions d'une unique variable aléatoire ..... 82
4.2.1 Espérance ..... 82
4.2.2 Fonction $g(X)$ d'une variable aléatoire ..... 88
4.2.3 Variable aléatoire centrée ..... 91
4.2.4 Moments : cas général ..... 92
4.2.5 Moments d'ordre 2, variance ..... 93
4.2.6 Fonction caractéristique ..... 95
4.3 Conclusions et extensions ..... 98
5 Couple et vecteur de variables aléatoires réelles ..... 99
5.1 Couple de variables aléatoires ..... 99
5.1.1 Loi de probabilité conjointe ..... 99
5.1.2 Fonction de répartition conjointe ..... 99
5.1.3 Cas discret et continu, densité conjointe ..... 102
5.1.4 Propriétés statistiques marginales ..... 103
5.1.5 Fonctions de répartition, densités et probabilités conditionnelles ..... 105
5.1.6 Couple de variables aléatoires indépendantes ..... 105
5.2 Fonctions d'un couple de variables aléatoires ..... 106
5.2.1 Fonction unique de deux variables aléatoires ..... 106
5.2.2 Moments croisés : cas général ..... 107
5.2.3 Moments croisés d'ordre 2, corrélation, covariance ..... 109
5.2.4 Fonction caractéristique conjointe ..... 115
5.2.5 Couple de fonctions de deux variables aléatoires ..... 116
5.3 Vecteur aléatoire ..... 118
5.4 Conclusions et extensions ..... 121
6 Signaux aléatoires réels ..... 122
6.1 Signal aléatoire unique ..... 122
6.1.1 Définition ..... 122
6.1.2 Propriétés statistiques d'un signal aléatoire ..... 126
6.1.3 Stationnarité ..... 129
6.1.4 Caractéristiques des signaux aléatoires stationnaires à l'ordre 2 ..... 131
6.1.5 Ergodisme et estimation des propriétés statistiques d'un signal aléatoire ..... 133
6.1.6 Bruit blanc ..... 136
6.2 Couple de signaux aléatoires ..... 137
6.2.1 Principe ..... 137
6.2.2 Résultats principaux ..... 137
6.3 Vecteur de signaux aléatoires ..... 138
6.4 Conclusions et extensions ..... 139
6.5 Annexe A : autre expression de la DSP ..... 139
6.6 Annexe B : variables et signaux aléatoires complexes ..... 139
II Traitement d'antenne ..... 141
7 Position du problème ..... 142
7.1 Système considéré ..... 142
7.2 Objectif ..... 143
7.3 Méthodes actives et passives ..... 143
7.4 Domaines d'application ..... 143
7.5 Conclusions et extensions ..... 144
8 Signaux spatiotemporels et antennes ..... 145
8.1 Signaux spatiotemporels ..... 145
8.1.1 Définition ..... 145
8.1.2 Equation d'onde ..... 145
8.1.3 Solutions particulières de l'équation d'onde ..... 145
8.2 Espace vecteur d'onde - pulsation temporelle ..... 148
8.2.1 Transformation de Fourier des signaux spatiotemporels ..... 148
8.2.2 Filtrage dans l'espace vecteur d'onde - pulsation temporelle ..... 148
8.3 Antenne ..... 149
8.3.1 Capteurs et signaux associés ..... 149
8.3.2 Antenne à sommation pure : structure et expression de la sortie ..... 153
8.3.3 Directivité ..... 154
8.3.4 Echantillonnage spatial et repliement ..... 159
8.3.5 Synthèse des propriétés de l'antenne ..... 164
8.4 Conclusions et extensions ..... 164
8.5 Annexe : autres représentations de la directivité ..... 164
9 Méthodes conventionnelles de formation de voie ..... 167
9.1 Formation de voie par retard et sommation ..... 167
9.1.1 Capteurs et signaux associés ..... 167
9.1.2 Structure générale de l'antenne ..... 167
9.1.3 Choix des filtres du vecteur de pondération ..... 168
9.1.4 Sortie ..... 169
9.1.5 Directivité ..... 170
9.2 Antenne avec placement du lobe principal et des zéros ..... 173
9.2.1 Capteurs et signaux associés ..... 173
9.2.2 Structure de l'antenne ..... 175
9.2.3 Principe de choix des filtres de pondération ..... 175
9.2.4 Valeurs des filtres : cas d'une antenne à deux capteurs ..... 175
9.2.5 Valeurs des filtres: cas d'une antenne à $N$ capteurs ..... 177
9.3 Conclusions et extensions ..... 180
10 Traitement d'antenne adaptatif ..... 181
10.1 Matrice de corrélation spatiospectrale des observations ..... 181
10.2 Méthodes à optimisation sous contrainte ..... 182
10.2.1 Cas général ..... 182
10.2.2 Méthode de formation de voie à variance minimale ..... 183
10.3 Méthodes fondées sur les sous-espaces ..... 190
10.3.1 Capteurs et signaux associés ..... 190
10.3.2 Expressions de la matrice de corrélation spatiospectrale des observations ..... 191
10.3.3 Propriétés de la matrice de corrélation spatiospectrale des observations ..... 193
10.3.4 Algorithme ..... 196
10.4 Conclusions et extensions ..... 197
III Séparation aveugle de sources (SAS) ..... 198
11 Concepts généraux ..... 199
11.1 Objectif de la SAS ..... 199
11.2 Conditions d'étude générales ..... 200
11.2.1 Signaux observés ..... 200
11.2.2 Signaux sources ..... 201
11.2.3 Modèle de mélange ..... 202
11.3 Classes de mélanges usuelles ..... 203
11.3.1 Mélanges Linéaires Instantanés (LI) ..... 203
11.3.2 Mélanges anéchoïques (ou à atténuations et retards) ..... 204
11.3.3 Mélanges convolutifs ..... 205
11.4 Principes majeurs des méthodes de SAS pour mélanges LI ..... 206
11.4.1 Système de séparation ..... 206
11.4.2 Analyse en Composantes Indépendantes et méthodes liées ..... 209
11.4.3 Analyse en composantes parcimonieuses ..... 212
11.4.4 Factorisation en matrices non négatives ..... 219
11.5 Conclusions et extensions ..... 220
12 Méthodes fondées sur les moments ou cumulants ..... 221
12.1 Position du problème ..... 221
12.1.1 Conditions d'étude et notations ..... 221
12.1.2 Structure du chapitre ..... 222
12.2 Cumulants d'une unique variable aléatoire ..... 223
12.2.1 Définition ..... 223
12.2.2 Lien avec les moments ..... 224
12.2.3 Autres propriétés, intérêt ..... 225
12.2.4 Définitions et propriétés liées au kurtosis ..... 226
12.3 Cumulants d'un vecteur aléatoire ..... 228
12.3.1 Définition ..... 228
12.3.2 Lien avec les moments ..... 229
12.3.3 Autres propriétés, intérêt ..... 231
12.4 Capacités et limitations des statistiques d'ordre 2 en SAS ..... 232
12.4.1 Principe et insuffisance du blanchiment ..... 232
12.4.2 Intérêt du blanchiment ..... 233
12.4.3 Exemple de méthode de blanchiment ..... 234
12.5 Méthode simple à fonctions non linéaires ou moments ..... 235
12.5.1 Structure du système de séparation de Hérault-Jutten ..... 235
12.5.2 Existence d'une solution ..... 237
12.5.3 Algorithme d'adaptation : cas général des fonctions non linéaires ..... 238
12.5.4 Algorithme d'adaptation : cas des moments croisés $(3,1)$ ..... 241
12.6 Méthode simple à cumulants de toutes les sorties ..... 243
12.6.1 Principe de la méthode ..... 243
12.6.2 Limitations de la méthode ..... 245
12.7 Méthodes performantes à cumulants de toutes les sorties ..... 246
12.7.1 Principe général ..... 246
12.7.2 Méthode COM2 ..... 247
12.7.3 Méthode JADE ..... 247
12.7.4 Notion de méthodes MIMO et MISO ..... 247
12.8 Méthode performante à kurtosis d'une unique sortie ..... 248
12.8.1 Critère de séparation et méthode à déflation ..... 248
12.8.2 Algorithmes d'optimisation du kurtosis : montée en gradient et FastICA ..... 252
12.8.3 Limitations de l'approche ..... 254
12.9 Conclusions et extensions ..... 254
12.10Annexe : skewness ..... 254
13 Méthode de SAS fondée sur la vraisemblance ..... 255
13.1 Conditions d'étude et notations ..... 255
13.2 Méthode du maximum de vraisemblance ..... 255
13.2.1 Critère de séparation ..... 255
13.2.2 Gradient de la log-vraisemblance ..... 259
13.2.3 Optimisation par montée en gradient et mise en œuvre de la méthode ..... 260
13.3 Conclusions et extensions ..... 261
14 Théorie de l'information et application à la SAS ..... 262
14.1 Position du problème ..... 262
14.1.1 Conditions d'étude et notations ..... 262
14.1.2 Structure du chapitre ..... 262
14.2 Entropie ..... 262
14.2.1 Objectif ..... 262
14.2.2 Mesure d'incertitude d'une expérience : cas d'issues équiprobables ..... 263
14.2.3 Entropie d'une expérience : cas général ..... 265
14.2.4 Entropie d'une variable aléatoire réelle discrète ..... 266
14.2.5 Propriétés de l'entropie ..... 268
14.3 Entropie conjointe, entropie conditionnelle ..... 271
14.3.1 Commentaires préliminaires sur deux cas particuliers ..... 271
14.3.2 Démonstration pour des expériences quelconques ..... 272
14.3.3 Application aux variables aléatoires réelles discrètes ..... 274
14.3.4 Propriétés de l'entropie conditionnelle ..... 275
14.4 Information mutuelle ..... 277
14.4.1 Définition ..... 277
14.4.2 Propriétés ..... 277
14.5 Cas de variables aléatoires réelles continues ..... 280
14.5.1 Entropie différentielle ..... 280
14.5.2 Entropies différentielles conjointe et conditionnelle ..... 280
14.5.3 Information mutuelle ..... 281
14.5.4 Propriétés ..... 282
14.6 Méthode de SAS fondée sur l'information mutuelle des sorties ..... 283
14.6.1 Critère de séparation ..... 283
14.6.2 Expressions de l'information mutuelle des sorties ..... 284
14.6.3 Gradient de l'information mutuelle des sorties ..... 285
14.6.4 Lien avec l'approche fondée sur la vraisemblance ..... 286
14.7 Méthode de SAS fondée sur le principe «infomax» ..... 287
14.7.1 Structure du système de séparation ..... 287
14.7.2 Critère de séparation ..... 287
14.7.3 Lien avec les approches précédentes ..... 288
14.8 Méthode de SAS à néguentropie d'une unique sortie ..... 288
14.8.1 Notion complémentaire de théorie de l'information : néguentropie ..... 288
14.8.2 Méthode de SAS fondée sur la néguentropie; montée en gradient et FastICA ..... 290
14.9 Conclusions et extensions ..... 292
14.10Annexe : dérivée de l'entropie différentielle ..... 292
Références ..... 295
Notations et abréviations ..... 302
Index ..... 303

