Chapitre 1

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les espaces vectoriels ont été introduits par **Cayley** et **Grassmann** au milieu du XIX^e siècle. Cependant, le premier ne proposait qu'un calcul sur des n-uplets et la formalisation du second était des plus obscures. Ce fut l'œuvre de Giuseppe **Peano** de déchiffrer le travail du mathématicien allemand et de donner le premier, en 1888, une définition satisfaisante d'un espace vectoriel. Il introduisit les applications linéaires et montra que cette théorie ne se réduit pas à la dimension finie en citant l'exemple des polynômes. Giuseppe Peano est aussi connu pour son axiomatique des entiers naturels et pour avoir construit une courbe remplissant un carré. On lui doit d'astucieux contre-exemples qui ont remis en cause des assertions qui semblaient pourtant bien établies.

Giuseppe Peano
1858-1932

■■ Objectifs

■ Les incontournables

▷ Revoir les notions élémentaires concernant les espaces vectoriels : famille libre, famille génératrice, base, dimension finie, etc.

▷ Approfondir les notions de somme et de somme directe de sous-espaces vectoriels à plus de deux sous-espaces vectoriels. En particulier, savoir décomposer en somme directe par fractionnement d'une base

▷ Savoir manipuler les projecteurs et connaître parfaitement leur lien avec une somme directe finie de sous-espaces vectoriels

▷ Savoir déterminer le rang, l'image et le noyau d'une application linéaire (par une base ou un système d'équations)

▷ Savoir ce qu'est un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, savoir manipuler un endomorphisme induit sur un tel sous-espace vectoriel.

■ Et plus si affinités...

▷ Savoir démontrer qu'une famille infinie est libre

▷ Savoir inverser ou calculer les puissances successives d'un endomorphisme grâce à un polynôme annulateur

▷ Savoir démarrer un exercice sur les endomorphismes nilpotents ($f \in \mathcal{L}(E)$ avec $f^n = 0$.)

▷ Faire le lien entre hyperplan et noyau d'une forme linéaire non nulle.

Résumé de cours

$\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Familles libres, familles génératrices, bases

Définition : Combinaison linéaire —. *On appelle combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs $\vec{u}_1$, ..., $\vec{u}_p$ de E toute somme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{u}_i$, où $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des scalaires (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$), appelés coefficients de la combinaison linéaire.*

Proposition 1.1.— L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie $X = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par X et noté $\mathrm{Vect}\,(X)$.

Définition : Famille libre, famille liée —. ▸ *$(\vec{u}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, famille **finie** de vecteurs de E, est **libre** (on dit aussi que ces vecteurs sont indépendants) si, et seulement si, pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ appartenant à $\mathbb{K}^n$, on a l'implication :*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0.}$$

▸ *On peut étendre à $(\vec{u}_i)_{i \in I}$, famille de vecteurs de E de cardinal quelconque. Elle est **libre** si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.*
▸ *Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.*

Remarques : ▸ Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
▸ Toute famille contenant une famille liée est liée. (C'est la contraposition de l'implication précédente.) En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.
▸ Une famille de deux vecteurs est liée si, et seulement si, ces deux vecteurs sont colinéaires.
▸ Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Proposition 1.2.— Famille liée et combinaison linéaire —. On suppose I fini. Une famille $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est liée si, et seulement si, l'un au moins des $\vec{u}_i$ est combinaison linéaire des autres.

Définition : Famille génératrice —. *Une famille X de E est une **famille génératrice de l'espace vectoriel** E si, et seulement si, tout vecteur de E est une combinaison linéaire finie de vecteurs de E. Dans le cas où X est une famille finie, on a alors :* $\mathrm{Vect}\, X = E$.

Définition : Base —. *Une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une **base** de E si, et seulement si, elle est une famille libre et génératrice.*

Exemples : ▸ $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. $(X^i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
▸ $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Ce sont les bases les plus simples de chacun de ces espaces vectoriels : on dit que ce sont leurs **bases canoniques** respectives.

■ Dimension

Définition : Espace vectoriel de dimension finie —. *Un espace vectoriel est* ***de dimension finie*** *si, et seulement s'il admet une famille génératrice finie.*

Proposition 1.3.— Théorème d'existence d'une base et de la base incomplète —.
- Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet une base finie.
- On peut extraire de toute famille génératrice finie de E une base de E.
- Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Lemme 1.4.— Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre ne peut avoir plus d'éléments qu'une famille génératrice.

Théorème 1.5.— Théorème de la dimension —.
Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé ***dimension de*** E et noté $\dim E$.
Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.

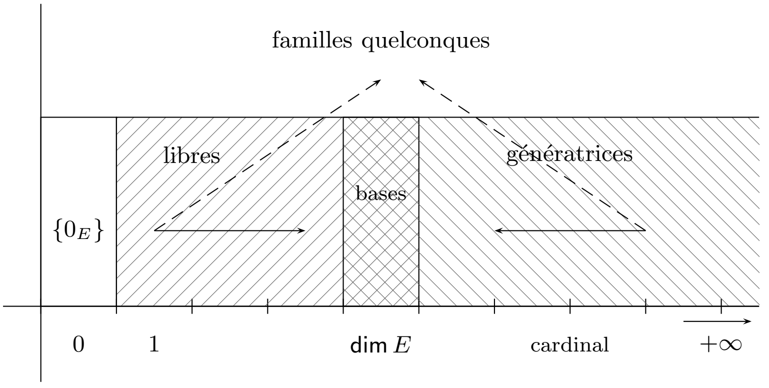

Illustration du théorème de la dimension, et de la proposition suivante

Proposition 1.6.— En ajoutant un élément $\vec{x}$ à une famille libre L, on obtient une famille libre si $\vec{x} \notin \mathrm{Vect}\,(L)$, et une famille liée si $\vec{x} \in \mathrm{Vect}\,(L)$.
En enlevant un élément $\vec{x}$ à une famille génératrice G, on obtient une famille non génératrice si $\vec{x} \notin \mathrm{Vect}\,(G \setminus \{\vec{x}\})$ et une famille génératrice si $\vec{x} \in \mathrm{Vect}\,(G \setminus \{\vec{x}\})$.

Proposition 1.7.— Si $\dim E = n$ et si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs de E, alors il y a équivalence entre :
(1) $\mathcal{B}$ est une base de E (2) $\mathcal{B}$ est une famille libre (3) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.

Proposition 1.8.— Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Définition : Base adaptée à un sous-espace vectoriel —. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, une base de E est **adaptée à** F lorsque ses p premiers vecteurs forment une base de F.*

Proposition 1.9.— Coordonnées d'un vecteur dans une base —. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ une base de E. Pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, il existe un n-uplet unique $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que :

$$\boxed{\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \vec{e}_i.}$$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est le ***n-uplet des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.***

Exemple : Les coordonnées d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont ses coefficients.

Définition : Rang d'une famille de vecteurs —. *Le **rang d'une famille finie de vecteurs** est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.*

Notation : *Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est noté* $\mathsf{Rg}\,(\mathcal{F})$.

■ Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels

Soit $n \geqslant 2$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit E_i, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Alors $E_1 \times ... \times E_n = \{(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n), \forall\, i \in [\![1, n]\!], \vec{u}_i \in E_i\}$ est appelé le produit de ces espaces vectoriels et est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On définit :

$$\text{la somme : } (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) + (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, ..., \vec{u}_n + \vec{v}_n),$$

$$\text{le produit par } \lambda \in \mathbb{K} : \lambda.(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) = (\lambda\vec{u}_1, ..., \lambda\vec{u}_n).$$

Proposition 1.10.— Dans le cas où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, E_i est de dimension finie alors :

$$\boxed{\mathsf{dim}\ (E_1 \times ... \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{dim}\, E_i.}$$

■ Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Définition : Somme —. *Soit $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E, **la somme de ces sous-espaces vectoriels** est le sous-espace vectoriel, noté $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$, engendré par la réunion des E_i :*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathsf{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).}$$

L'appellation « somme de sous-espaces vectoriels » est justifiée par la caractérisation suivante.

Proposition 1.11.— $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est l'ensemble des sommes de vecteurs des E_i, autrement dit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i, \text{ où, } \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \vec{u}_i \in E_i \right\}}.$$

Définition : Somme directe —. ***La somme des sous-espaces vectoriels de la famille*** $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ ***est directe*** *si et seulement si :*

$$\boxed{\forall\, (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \vec{u}_i = 0_E \right)}.$$

Dans ce cas, on note la somme de ces sous-espaces vectoriels : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition 1.12.— Caractérisation d'une somme directe —. La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe si et seulement si tout $\vec{u}$ de $\sum_{i=1}^{n} E_i$ se décompose **de manière unique** sous la forme : $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i$, où $(\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Définition : Sous-espaces vectoriels supplémentaires —.
Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *de* E *sont* ***supplémentaires dans*** E *si, et seulement si, leur somme est directe et égale à* E*, autrement dit, lorsque :* $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition 1.13.— Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E sont supplémentaires si, et seulement si,

$$\boxed{\forall\, \vec{u} \in E,\ \exists!\, (\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i.}$$

Proposition 1.14.— Existence d'un supplémentaire —.
Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admet un supplémentaire.

Lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit, **de manière unique** :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i, \text{ où } (\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} E_i.$$

Théorème-Définition 1.15.— Base adaptée à une décomposition en supplémentaires —.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{B}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si la somme des $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n)$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Si les E_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont supplémentaires dans E, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n)$ est une base de E dite **base adaptée à la décomposition** $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$**.**

Corollaire 1.16.— Caractérisation d'une somme directe par les dimensions —.
Les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ étant des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E :

$$\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_i}.$$

Et l'on a l'égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Corollaire 1.17.— Supplémentaires en dimension finie —.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$;

(ii) les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$;

(iii) $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

Corollaire 1.18.— Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels —.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)\,.}$$

■ Applications linéaires

Définition : *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $\phi : E \to F$ est dite* **linéaire** *si pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E et pour tout scalaire $a \in \mathbb{K}$,*

$$\phi(a\vec{u}+\vec{v}) = a\phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v}).$$

Lorsque $E = F$, on dit que ϕ est un **endomorphisme***. Une application linéaire qui est une bijection est un* **isomorphisme***. Un endomorphisme bijectif est un* **automorphisme***.*

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans le cas $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ cet ensemble.

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g\,o\,f \in \mathcal{L}(E,G)$.
Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F vers E.
L'ensemble des automorphismes de E est appelé le **groupe linéaire**. On le note $\mathrm{GL}(E)$.

Proposition 1.19.— Détermination d'une application linéaire en dimension finie —. Étant donné deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_p)$ de E et une famille $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p)$ de vecteurs de F, il existe une application linéaire ϕ, et une seule, de E dans F, telle que :

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ \phi(\vec{e}_i) = \vec{f}_i.$$

Définition : Espaces vectoriels isomorphes —. *Deux espaces vectoriels sont* ***isomorphes*** *si, et seulement s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.*

Proposition 1.20.— L'image d'une base (respectivement d'une famille libre) par un isomorphisme est une base (respectivement une famille libre).

Proposition 1.21.— Conservation du rang par un isomorphisme —. L'image par un isomorphisme d'une famille de vecteurs est une famille de vecteurs de même rang.

Remarque : Une base de E étant choisie, l'application associant à un vecteur le n-uplet de $\mathbb{K}^n$ de ses coordonnées dans cette base est un isomorphisme ; en conséquence, le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la famille des n-uplets de ses coordonnées dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition 1.22.— Deux espaces vectoriels E et F (sur le même ensemble $\mathbb{K}$) de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, leurs dimensions sont égales.

Conséquence : Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Théorème-Définition 1.23.— Noyau d'une application linéaire —. ϕ étant une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'ensemble $\{\vec{x} \in E,\ \phi(\vec{x}) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé ***noyau de*** ϕ et noté $\mathsf{Ker}\,\phi$.

Théorème-Définition 1.24.— Image d'une application linéaire —. ϕ étant une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'ensemble $\{\phi(\vec{x}),\ \vec{x} \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F appelé ***image*** de ϕ et noté $\mathsf{Im}\,\phi$.

Définition : Rang d'une application linéaire —. *Dans le cas où* $\mathsf{Im}\,\phi$ *est de dimension finie, le* ***rang de l'application linéaire*** ϕ *est la dimension de son image, c'est-à-dire* $\dim \mathsf{Im}\,\phi$.

Proposition 1.25.— E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base et ϕ étant une application linéaire de E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F :

$$\boxed{\mathsf{Im}\,\phi = \mathsf{Vect}\ (\phi(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}\ \text{ et } \mathsf{Rg}\,\phi = \mathsf{Rg}\ (\phi(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}\,.}$$

Proposition 1.26.— Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, si K' est un supplémentaire quelconque de $\mathsf{Ker}\,\phi$ dans E, alors ϕ induit un isomorphisme de K' sur $\mathsf{Im}\,\phi$.

Remarque : Ce résultat ne nécessite pas que E soit de dimension finie, mais seulement que $\mathsf{Ker}\,\phi$ admette un supplémentaire.