SAVOIRS

Thème 1 - Compléments d'algèbre linéaire

[S1.1] Définition du produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels

Si $E_1, ..., E_q$, où q est un entier supérieur ou égal à 2, sont des espaces vectoriels alors $E_1 \times .... \times E_q$ muni de l'addition :

- $(x_1, ..., x_q) + (y_1, ..., y_q) = (x_1 + y_1, ..., x_q + y_q)$

et de la multiplication externe :

- $\alpha (x_1, ..., x_q) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_q)$

est un espace vectoriel qu'on appelle produit des espaces vectoriels $E_1, ..., E_q$.

[S1.2] Dimension du produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels

Si $E_1, ..., E_q, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ sont des **s.e.v de dimension finie** de E :

- $E_1 \times ... \times E_q$ est de dimension finie et on a :
- $\dim (E_1 \times ... \times E_q) = \dim (E_1) + ... + \dim (E_q)$.

[S1.3] Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Si $E_1, ..., E_q, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ sont des s.e.v d'un espace vectoriel E, alors :
$\left\{ \sum\limits_{i=1}^{q} x_i, \text{ où, } \forall i \in [\![1, q]\!], \, x_i \in E_i \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E noté $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} E_i$ et appelé somme des sous-espaces E_i.

[S1.4] Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

La somme des sous-espaces vectoriels $E_i, i \in [\![1, q]\!]$, est dite directe si et seulement si : $\forall \left(x_i\right)_{1 \leq i \leq q} \in \prod\limits_{i=1}^{q} E_i, \left[\sum\limits_{i=1}^{q} x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, q]\!], \, x_i = 0_E \right]$.

Dans ce cas, on note $\bigoplus\limits_{i=1}^{q} E_i$ la somme des $E_i, i \in [\![1, q]\!]$.

✓ Les E_i sont en somme directe si et seulement si l'application de $\displaystyle\prod_{i=1}^{q} E_i$ dans $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} E_i$ qui à $(x_i)_{1 \leq i \leq q}$ associe $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} x_i$ est un isomorphisme.

[S1.5] Caractérisation d'une somme directe d'une famille de s.e.v

La somme (ici finie) des sous-espaces vectoriels $E_i, i \in [\![1, q]\!]$, est directe si et seulement si, pour tout $x \in \sum\limits_{i=1}^{q} E_i$, il existe une unique famille $(x_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \displaystyle\prod_{i=1}^{q} E_i$ telle que l'on ait la décomposition $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} x_i$.

[S1.6] Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Les sous-espaces vectoriels E_i, $i \in [\![1,q]\!]$, de E sont dits supplémentaires dans E si et seulement si leur somme est directe et égale à E.

[S1.7] Base adaptée à une décomposition en somme directe

Si les sous-espaces vectoriels E_i, $i \in [\![1,q]\!]$, d'un espace vectoriel E de dimension finie sont supplémentaires dans E et si $\forall i \in [\![1,q]\!]$, $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i alors : $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_q)$ est une base de E dite base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$.

✓ Une base de E est dite adaptée à un sous-espace vectoriel F lorsqu'elle est obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base d'un supplémentaire de F dans E.

[S1.8] Majoration de la dimension d'une somme finie de s.e.v

Si E est de dimension finie alors $\dim\left(\sum_{i=1}^{q} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{q} \dim E$ et $\sum_{i=1}^{q} E_i$ est directe si et seulement si $\dim\left(\sum_{i=1}^{q} E_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \dim E_i$.

[S1.9] Matrices par blocs et opérations sur les matrices par blocs

- Soit $(n,p,r,s) \in \mathbb{N}^4$ avec $1 \leq r < n$ et $1 \leq s < p$. On dit que $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet la décomposition par blocs (r,s) si : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où :
$A \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{r,p-s}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-r,s}(\mathbb{K})$,
$D \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}(\mathbb{K})$.
- Soit $(n,p,r,s) \in \mathbb{N}^4$ avec $1 \leq r < n$ et $1 \leq s < p$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet la décomposition par blocs (r,s) : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, et $M' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la décomposition par blocs (r,s) : $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, alors la somme $M + M' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet la décomposition par blocs (r,s) :
$$M + M' = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}.$$
- Soit $(n,p,q,r,s,t) \in \mathbb{N}^6$ avec $1 \leq r < n$ et $1 \leq s < p$ et $1 \leq t < q$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet la décomposition par blocs (r,s) : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, et $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ la décomposition par blocs (s,t) : $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, alors le produit $MM' \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ admet la décomposition par blocs (r,t) :
$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

[S1.10] Sous-espace stable par un endomorphisme

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
- On dit que F est stable par u si $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.
- Lorsque F est stable par u on appelle endomorphisme induit par u sur F l'endomorphisme de F noté u_F qui à tout $x \in F$ associe $u(x)$.

✓ Il ne faut pas confondre l'endomorphisme induit qui va de F dans F lorsque est stable avec la restriction dans le cas général qui va de F dans E.

[S1.11] Stabilité de l'image et du noyau d'un endomorphisme

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Si $u \circ v = v \circ u$ alors $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont stables par u.

[S1.12] Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace

- Si E est de dimension finie n alors F est stable par u si et seulement si relativement à une base adaptée à F, la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs.
- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ avec $\dim E_i = n_i$, où $n_i \in \mathbb{N}^*$, chacun des E_i est stable par u si et seulement si dans toute base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, la matrice M de u est diagonale par blocs, $M = \operatorname{diag}(M_1, ..., M_p)$ où pour tout $i \in i \in [\![1, p]\!]$, alors $M_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.

[S1.13] Matrices semblables

Deux matrices carrées A et B d'ordre n sont dites semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

✓ Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

[S1.14] Trace d'une matrice carrée et trace d'un endomorphisme

- Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A et on note $\operatorname{Tr}(A)$ le scalaire $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
- L'application Tr est une application linéaire non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}\left(A^T\right)$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ alors $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\operatorname{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \operatorname{Tr}(A)$.
- Si E est de dimension finie $n \geq 1$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ on appelle trace de u et on note $\operatorname{Tr}(u)$ la trace d'une matrice de u relativement à une base $\mathcal{B}$ de E, étant entendu que cela ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.

Thème 2 - Déterminants

Ici n est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[S2.1] Définition du déterminant d'une matrice carrée de taille n

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés :

• f est **linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable**, c'est-à-dire que si $C_1, ..., C_n$ sont des matrices colonnes, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'application

$$X \mapsto f(C_1, C_2, .., C_{j-1}, X, C_{j+1}, ..., C_n)$$

est linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$.
• f est antisymétrique, c'est-à-dire que si dans A, on effectue l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$, et si l'on note B la matrice obtenue alors $f(A) = -f(B)$.
• Enfin, $f(I_n) = 1$.

On dit que $f(A)$ est le **déterminant** de A et on note $\det(A)$ la quantité $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

[S2.2] Propriétés du déterminant d'une matrice

• $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\det(A.B) = \det A \times \det B$.
• $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
• $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0)$.
• $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.
• Les déterminants de deux matrices semblables sont égaux.
• $\det(A) = \det(A^T)$.

[S2.3] Développement selon une rangée d'un déterminant

• Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$\boxed{\forall\, j \in [\![1, n]\!],\ \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j},}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant d'ordre $n-1$ issu de $\det A$, en y enlevant la ligne L_i et colonne C_j. On dit que le déterminant de A est obtenu **en développant suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne**.

• Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$\boxed{\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j},}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant d'ordre $n-1$ issu de $\det A$, en y enlevant la ligne L_i et colonne C_j.
On dit que le déterminant de A est obtenu **en développant suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne**.

[S2.4] Formes particulières de déterminants

• Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est égal au produit des éléments de sa diagonale.

✓ En particulier, ce résultat est vrai si la matrice est diagonale.

• Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Avec la notation bloc $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ vue dans le **chapitre 1**, on a la formule (où $C = 0$) :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \det A . \det D.$$

• Déterminant de Vandermonde

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_p) \in \mathbb{K}^p$ $(p \geqslant 2)$, alors :

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_p) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{p-1}^2 & a_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{p-1} & a_2^{p-1} & \cdots & a_{p-1}^{p-1} & a_p^{p-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (a_j - a_i).$$

$V(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ est appelé **déterminant de Vandermonde**.

✓ La démonstration est proposée au deuxième exemple du [**SF2.5**].

[S2.5] Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle **déterminant de la famille** $\mathcal{F}$ selon $\mathcal{B}$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre n telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, sa colonne C_j est constituée des composantes de u_j dans $\mathcal{B}$. On le note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, une famille de n vecteurs est une base de E si et seulement si son déterminant dans une base quelconque de E est non nul.

[S2.6] Déterminant d'un endomorphisme

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $\phi \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **déterminant de l'endomorphisme** ϕ le déterminant de la matrice carrée A d'ordre n représentant ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
On le note $\det \phi$. Comme le déterminant de A et d'une matrice semblable à A sont égaux, $\det \phi$ ne dépend pas de la base choisie.

• Soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(E)^2$, alors :

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det\ \varphi \times \det\ \psi.$$

• Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, alors φ est un automorphisme si et seulement si $\det\ \varphi \neq 0$.
Dans ce cas :

$$\det\ \left(\varphi^{-1}\right) = \frac{1}{\det \varphi}.$$

Thème 3 - Réduction des endomorphismes

On suppose dans ce qui suit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, u un endomorphisme de E, M un élément de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

[S3.1] Définition d'un vecteur propre

- Un élément $x \in E$ est dit vecteur propre de u s'il est **non nul** et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- Une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est assimilée à un vecteur par ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il est **non nul** et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $MX = \lambda X$.
- Dans les deux cas précédents, le scalaire λ est unique et appelé valeur propre de u (respectivement M) associée au vecteur propre x (respectivement X).

✓ Un vecteur x est vecteur propre de u si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

[S3.2] Définition d'une valeur propre

- Un scalaire λ est dit valeur propre de u si $u - \lambda\, Id_E$ n'est pas injectif et tout élément **non nul** de $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, Id_E)$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.
- Un scalaire λ est dit valeur propre de M si $M - \lambda\, I_n$ n'est pas inversible et tout élément **non nul** de $\mathrm{Ker}\,(M - \lambda\, I_n)$ (on accepte la notation $\mathrm{Ker}\, A$ pour désigner l'ensemble des matrices colonnes X telles que $AX = 0$) est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.
- On appelle spectre de u (respectivement M) et on note $\mathrm{Sp}\,(u)$ (respectivement $\mathrm{Sp}\,(M)$) l'ensemble des valeurs propres de u (respectivement M).

[S3.3] Définition du sous-espace propre associé à une valeur propre

- Si λ est une valeur propre de u, on appelle sous-espace propre associé à u et on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\, Id_E)$.
- Si λ est une valeur propre de M, on appelle sous-espace propre associé à M et on note $E_\lambda(M)$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(M - \lambda\, I_n)$.

✓ Le sous-espace propre associé à une valeur propre est donc constitué du vecteur nul et des vecteurs propres associés à cette valeur propre.

✓ L'endomorphisme induit par u sur un sous-espace propre est une homothétie.