Thème 1

Trigonométrie - Nombres complexes

1.1 Application de $\mathbb{C}$ dans lui-même - QCM

Le problème[#1] *qui suit a été posé au baccalauréat dans les termes suivants :*
Nous considérons l'application f de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par

$$f : z \to Z = \frac{z + i\,\lambda\,\overline{z}}{1 + i\,\lambda},$$

où $\overline{z}$ est le conjugué de z et λ un paramètre réel strictement positif.

1. *Pour quelles valeurs de λ l'application f est-elle bijective ? Exprimer alors $f^{-1}(z)$ en fonction de z et de $\overline{z}$ (f^{-1} désigne l'application réciproque de f).*

2. *Nous appelons m, m' et M les images respectives de z, $\overline{z}$ et Z dans le plan complexe et ϕ la transformation affine ponctuelle qui au point m fait correspondre le point M, ie : $\phi(m) = M$.*

a) *Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points invariants par ϕ, ie : N du plan tels que $\phi(N) = N$.*

b) *Pour $z \notin \mathcal{E}$, calculer le module et l'argument du nombre complexe*

$$\zeta = \frac{Z - z}{Z - \overline{z}}.$$

En déduire pour z fixé non réel, l'ensemble des points M lorsque le paramètre λ varie.

3. *Dans cette question $\lambda = 2$. Calculer les coordonnées $(X,\,Y)$ de M en fonction des coordonnées $(x,\,y)$ de m, préciser l'image par ϕ de la droite d'équation $x = 1$.*

Nous proposons de résoudre ce problème en répondant à des ***QCM****.*
ATTENTION : La règle du jeu usuel des QCM est modifiée comme suit :
Pour chaque question au plus deux assertions proposées sont exactes (cela veut dire : une, deux ou zéro).
Dans le cas ou aucune des assertions proposée n'est jugée exacte, répondre ***E.***
Rayer les assertions jugées fausses.

[#1] Ce problème a été traité simultanément de manière classique et par QCM par 157 élèves de 6 classes de terminale scientifique.

Les résultats ont établi une corrélation parfaite entre les deux séries de notes.

C'est à la suite de plusieurs expériences concordantes de ce type que les QCM furent validés pour certains concours.

Nous considérons l'application f de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par

$$f : z \to Z = f(z) = \frac{z + i\,\lambda\,\overline{z}}{1 + i\,\lambda},$$

où $\overline{z}$ est le conjugué de z et λ un paramètre réel strictement positif.

Question n° 01 :

L'application f est bijective si λ est

A : nul *B : égal à 1.* *C : différent de 1.* *D : différent de -1.*

Nous écrivons $f^{-1}(z)$ sous la forme $f^{-1}(z) = \alpha\, z + \beta\, \overline{z}$.

Question n° 02 :

La valeur de α est

A : $\dfrac{1}{1+i\,\lambda}$. *B :* $\dfrac{1}{1-\lambda^2}$. *C :* $\dfrac{i\,\lambda}{1-\lambda^2}$. *D :* $\dfrac{1+i\,\lambda}{1-\lambda^2}$.

Question n° 03 :

La valeur de β est

A : $\dfrac{-i\,\lambda\,(1-i\,\lambda)}{1-\lambda^2}$. *B :* $\dfrac{i\,\lambda}{1-i\,\lambda}$. *C :* $-\dfrac{\lambda\,(\lambda+i)}{1-\lambda^2}$. *D :* $\dfrac{\lambda}{1+i\,\lambda}$.

Nous désignons par ϕ la transformation affine ponctuelle qui au point m d'affixe z fait correspondre le point M d'affixe $Z = f(z)$ ie : $\phi(m) = M$.
L'ensemble des points invariants par ϕ est l'ensemble des points N du plan tels que $\phi(N) = N$.

Question n° 04 :

L'ensemble des points $\mathcal{E}$ invariants par ϕ est

A : l'axe des imaginaires. *B : l'axe des réels.*

C : l'ensemble vide. *D : une droite.*

Pour $z \notin \mathcal{E}$, nous définissons le nombre complexe : $\zeta = \dfrac{Z - z}{Z - \overline{z}}$.

Question n° 05 :

Si ζ est défini alors son module $|\zeta|$ a pour expression

A : $\sqrt{\lambda}$. *B :* $-\lambda$. *C :* $\dfrac{1}{\lambda}$. *D :* λ.

Question n° 06 :

L'argument $\arg \zeta$ a pour valeur (k désigne un entier relatif)

A : $-\dfrac{\pi}{2}$ à $2\,k\,\pi$ près. *B :* $\dfrac{\pi}{2}$ à $2\,k\,\pi$ près.

C : $-\dfrac{\pi}{2}$ à $k\,\pi$ près. *D :* $\dfrac{\pi}{2}$ à $k\,\pi$ près.

Question n° 07 :

Si z est fixé, tel que $\Im m\ z > 0$, alors l'ensemble des points M est

A : un demi-cercle situé à droite d'un diamètre vertical.

B : un demi-cercle situé à gauche d'un diamètre vertical.

C : situé sur un cercle.

D : un segment de droite.

Dans toutes les questions suivantes $\lambda = 2$. Soient (X, Y) les coordonnées de M et (x, y) celles de m.

Question n° 08 :

L'expression de X est

A : $\dfrac{4x+5y}{5}$. *B :* $\dfrac{5x+4y}{5}$. *C :* $\dfrac{4x-5y}{5}$. *D :* $\dfrac{5x-4y}{5}$.

Question n° 09 :

L'expression de Y est

A : $\dfrac{3y}{5}$. *B :* $-\dfrac{3y}{5}$. *C :* $\dfrac{5x-4y}{5}$. *D :* $-\dfrac{5x+4y}{5}$.

Question n° 10 :

L'image par ϕ de la droite d'équation $x = 1$ est

A : un cercle de centre O.

B : une droite passant par O.

C : un cercle non centré en O.

D : une droite ne passant pas par O.

Indication :

Revoir l'exercice 4.1 : page 247, pour l'étude d'une bijection.

Pour visualiser les points m, m' et M, il sera utile de faire deux figures, l'une avec $\Im m\, z > 0$ et l'autre avec $\Im m\, z < 0$. ★

Corrigé :

Nous allons résoudre ce problème tel qu'il était posé de manière classique, puis nous répondrons aux assertions proposées. Ceci nous permettra de mieux comprendre la construction des **QCM** et nous prouvera que cette nouvelle approche est bien identique à l'approche classique d'un problème.

1. Pour déterminer si f est une application bijective de $\mathbb{C}$ dans lui-même alors il suffit d'exprimer z en fonction de Z.

$$Z = \frac{z + i\,\lambda\,\overline{z}}{1 + i\,\lambda} \Leftrightarrow (1 + i\,\lambda)\ Z = z + i\,\lambda\,\overline{z},$$

soit en prenant le conjugué de la deuxième expression

$$(1 - i\,\lambda)\ \overline{Z} = \overline{z} - i\,\lambda\,z$$

et en éliminant $\overline{z}$ entre les deux égalités (il suffit de multiplier la seconde par $-i\,\lambda$ et d'ajouter ensuite)

$$\left(1 - \lambda^2\right)\ z = (1 + i\,\lambda)\ Z - i\,\lambda\ (1 - i\,\lambda)\ \overline{Z}. \tag{1.1}$$

Il est clair que z ne peut être calculé que si et seulement si $\lambda^2 \neq 1$, ce qui équivaut à $\lambda \neq 1$ car par hypothèse λ est un paramètre réel strictement positif.

Nous en déduisons que f^{-1} existe pour $\lambda \neq 1$ et que son expression est

$$f^{-1}(z) = \frac{1 + i\,\lambda}{1 - \lambda^2}\, z - \frac{i\,\lambda\,(1 - i\,\lambda)}{1 - \lambda^2}\, \overline{z}. \tag{1.2}$$

Nous pouvons aussi exprimer la relation (1.2) d'une autre manière en remarquant que $1 - \lambda^2 = (1 + i\,\lambda)(1 - i\,\lambda)$

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{1 - i\,\lambda}\, z - \frac{\lambda}{1 + i\,\lambda}\, \overline{z}. \tag{1.3}$$

et en simplifiant.

2. Le point N d'affixe z est invariant par ϕ si et seulement si $f(z) = z$.

a) Par hypothèse $z = \dfrac{z + i\,\lambda\,\overline{z}}{1 + i\,\lambda}$, ce qui donne en simplifiant

$$i\,\lambda\,(z - \overline{z}) = 0, \tag{1.4}$$

soit $z - \overline{z} = 0$ car $\lambda > 0$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ des points invariants par ϕ est donc l'axe des réels.

b) Nous avons

$$\zeta = \frac{Z - z}{Z - \overline{z}} = \frac{\dfrac{z + i\,\lambda\,\overline{z}}{1 + i\,\lambda} - z}{\dfrac{z + i\,\lambda\,\overline{z}}{1 + i\,\lambda} - \overline{z}} = -i\,\lambda\,\frac{z - \overline{z}}{z - \overline{z}} = -i\,\lambda,$$

car z est non réel ie : $z - \overline{z} \neq 0$.

Nous en déduisons que

$$|\zeta| = \lambda \text{ et } \arg \zeta = -\frac{\pi}{2} \text{ à } 2\,k\,\pi \text{ près avec } k \in \mathbb{Z}^{\#2}. \tag{1.5}$$

Si z est non réel fixé alors les points m, m' et M d'affixes respectives z, $\overline{z}$ et Z vérifient d'après (1.5)

$$\frac{mM}{m'M} = \lambda \text{ et } \left(\overrightarrow{m'M}, \overrightarrow{mM}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

exprimant lorsque λ varie que le point M décrit un demi cercle de diamètre mm'.

La position de ce demi cercle dépend de $\Im\mathrm{m}\, z$.

3. Pour $\lambda = 2$, nous isolons la partie réelle et la partie imaginaire de $Z = f(z)$, avec $Z = X + i\,Y$ et $z = x + i\,y$

$$X + i\,Y = \frac{x + i\,y + 2\,i\,(x - i\,y)}{1 + 2\,i},$$

en multipliant et en divisant par la quantité conjuguée du dénominateur $1 - 2\,i$

$$X + i\,Y = \frac{[x + i\,y + 2\,i\,(x - i\,y)]\,(1 - 2\,i)}{5} = \frac{5\,x + 4\,y}{5} - i\,\frac{3\,y}{5}.$$

D'où la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z

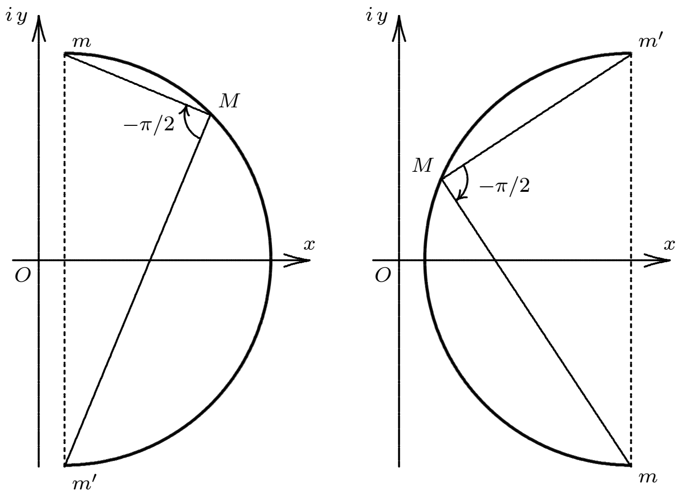
$$X = \frac{5\,x + 4\,y}{5} \text{ et } Y = -\frac{3\,y}{5}. \tag{1.6}$$

f étant bijective car $\lambda = 2 \neq 1$, nous pouvons exprimer x et y en fonction de X et de Y, à partir de (1.6).

$$x = \frac{1}{3}\,(3\,X + 4\,Y) \text{ et } y = -\frac{5}{3}\,Y.$$

[#2] Nous écrivons aussi

$$\arg \zeta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\,\pi}.$$



Cas où $\Im\mathrm{m}\ z > 0$ Cas où $\Im\mathrm{m}\ z < 0$

FIG. 1.1 – Représentation des deux cas.

Nous avons ainsi pour $x = 1$ la relation $3\,X + 4\,Y = 3$ vérifiée par les coordonnées du point M.

L'ensemble de ces points est la droite dont une équation est

$$3\,x + 4\,y - 3 = 0. \tag{1.7}$$

Nous pouvons maintenant répondre à toutes les assertions des 10 questions posées.

D'après la relation (1.1), nous pouvons calculer z si et seulement si $\lambda^2 \neq 1$, donc l'assertion 1 c) est vraie et les trois autres fausses.

Nous avons les réponses :

Question 01 :	~~A~~	~~B~~	**C**	~~D~~	~~E~~

D'après les relations (1.2) et (1.3), la valeur de α est $\dfrac{1 + i\,\lambda}{1 - \lambda^2}$ ou $\dfrac{1}{1 - i\,\lambda}$, donc l'assertion 2 d) est vraie et les trois autres fausses, remarquer le piège de l'assertion A.

Nous avons les réponses :

Question 02 :	~~A~~	~~B~~	~~C~~	**D**	~~E~~

D'après la relation (1.2), la valeur de β est $-\dfrac{i\,\lambda\,(1 - i\,\lambda)}{1 - \lambda^2} = -\dfrac{\lambda\,(\lambda + i)}{1 - \lambda^2}$ donc les assertions 3 a) et 3 c) sont vraies et les deux autres fausses.

La relation (1.3) permet de gagner des points. Il faut être rigoureux dans les **QCM**, remarquer le piège de l'assertion D.

Nous avons les réponses :

Question 03 :	**A**	~~B~~	**C**	~~D~~	~~E~~

D'après la relation (1.4), l'ensemble des points invariants par ϕ est l'axe réel, donc les assertions 4 b) et 4 d) sont vraies et les deux autres fausses. Encore un piège comme à la question précédente, c'est comme un fusil à répétition.

Nous avons les réponses :

Question 04 :	$\cancel{A}$	**B**	$\cancel{C}$	**D**	$\cancel{E}$

Vous avez remarqué que le calcul de ζ exige que $z - \overline{z} \neq 0$ donc la réserve du préambule de la question 5 est parfaitement justifié et donc dans la suite il faut prendre z non réel (voir ce qui se passe dans le cas contraire pour les deux figures).
D'après la relation (1.5), les assertions 5 d) et 6 a) sont vraies et les six autres fausses.
Nous avons les réponses :

Question 05 :	$\cancel{A}$	$\cancel{B}$	$\cancel{C}$	**D**	$\cancel{E}$

Question 06 :	**A**	$\cancel{B}$	$\cancel{C}$	$\cancel{D}$	$\cancel{E}$

D'après la relation (1.5) pour z fixé, tel que $\Im\mathrm{m}\, z > 0$, ce qui est le cas de la partie gauche de la figure 1.1, l'ensemble des points M est le demi-cercle de diamètre mm' situé dans la partie droite. Les assertions 7 a) et 7 c) sont donc vraies et les deux autres fausses. Remarquer le piège de l'assertion 7 c).

Nous avons les réponses :

Question 07 :	**A**	$\cancel{B}$	**C**	$\cancel{D}$	$\cancel{E}$

D'après la relation (1.6), les assertions 8 b) et 9 b) sont vraies et les six autres fausses.
Nous avons les réponses :

Question 08 :	$\cancel{A}$	**B**	$\cancel{C}$	$\cancel{D}$	$\cancel{E}$

Question 09 :	$\cancel{A}$	**B**	$\cancel{C}$	$\cancel{D}$	$\cancel{E}$

Enfin, la relation (1.7), montre que l'image par ϕ de la droite $x = 1$ est une droite ne passant pas par O, donc l'assertion 10 d) est vraie et les trois autres fausses.

Nous avons les réponses :

Question 10 :	$\cancel{A}$	$\cancel{B}$	$\cancel{C}$	**D**	$\cancel{E}$

Vous connaissez dorénavant quelques règles de construction des QCM, vous pouvez en faire vous-même.

1.2 Similitude dans $\mathbb{C}$

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormal Oxy, qui sera identifié au plan complexe $\mathbb{C}$ d'Argand-Cauchy.
Nous considérons l'application f qui au point m d'affixe z associe le point M d'affixe

$$Z = (1 + i)\, z - i.$$

1. *Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}$ sur lui-même (Il suffit pour cela de montrer que tout point M de $\mathcal{P}$ admet un et seul antécédent m).*
Déterminer l'expression complexe de f^{-1}, application réciproque de f.

2. *Expliquer pourquoi f est une similitude directe, préciser son centre Ω, son rapport k et son angle θ.*
Pour $m \neq \Omega$, préciser l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega m}, \overrightarrow{mM}\right)$ et préciser la nature du triangle ΩmM.
Que représente $f^{-1.}$

3. *Quelle est la transformée* (Δ) *par* f *de la droite* (δ) *d'équation* $x - y - 1 = 0$.

4. *Quelle est la transformée* (H) *par* f *de l'hyperbole équilatère* (h) *d'équation* $y = \dfrac{1}{4\,(1-x)}$.

Dire pourquoi (H) *est une hyperbole équilatère et préciser les équations des asymptotes.*

Les sommets de (H) *sont les points d'intersection* A *et* B *de* (H) *avec l'axe* Ox.

Déterminer les affixes des points a *et* b *de* (h) *tel que* $A = f\,(a)$ *et* $B = f\,(b)$.

5. *Construire sur une même figure* (δ), (Δ), (h), (H), *les points* a, b, A, B *et les tangentes en ces points.*

D'après baccalauréat - Montpellier 1980

Indication :

Une similitude directe est la composée (commutative) d'une homothétie et d'une rotation de même centre : pages 5, 6 et 8.

Les similitudes directes sous la forme complexe, sont définies et étudiées page 28, il est conseillé de revoir l'exercice 1.19 : page 29. ★

Corrigé :

1. Si Z est donné, quelconque dans $\mathbb{C}$, alors l'équation du premier degré d'inconnue z

$$(1+i)\,z - i = Z,$$

admet une et seule racine

$$z = \frac{Z+i}{1+i} = \frac{1}{2}\,[(1-i)\,Z + (1-i)\,i] = \frac{1}{2}\,(1-i)\,Z + \frac{1}{2}\,(1+i), \qquad (1.8)$$

ce qui prouve que f est une bijection et que l'expression de son application réciproque est

$$Z = f^{-1}\,(z) = \frac{1}{2}\,(1-i)\,z + \frac{1}{2}\,(1+i). \qquad (1.9)$$

2. L'expression complexe d'une similitude directe est de la forme $Z = a\,z + b$, avec $a \neq 1$.

Donc f est une similitude.

Nous pouvons écrire une similitude sous la forme

$$Z = k\,e^{i\,\theta}\,(z-\omega) + \omega,$$

où ω est l'affixe du centre Ω, k le rapport et θ l'angle.

Par identification

$$a = k\,e^{i\,\theta} = 1+i, \text{ soit } k = \sqrt{2} \text{ et } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Le point invariant ω est défini par

$$\omega = (1+i)\,\omega - i, \text{ soit } \omega = 1.$$

$\left(\overrightarrow{\Omega m}, \overrightarrow{mM}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ car c'est l'argument du nombre complexe

$$\frac{Z-z}{z-\omega} = \frac{i\,(z-1)}{z-1} = i = e^{i\,\pi/2},$$

représentant le rapport des affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega m}$ et $\overrightarrow{mM}$.

De plus $\left|\dfrac{Z-z}{z-\omega}\right| = 1$ exprime que $\Omega m = mM$ et ainsi la triangle $\Omega m M$ est rectangle isocèle en m.

f^{-1} est la similitude de même centre Ω, de rapport $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.
Ces résultats sont obtenus en remarquant que le produit des rapports est 1 et la somme des angles 0, car $f \circ f^{-1} = id$.

3. La droite (δ) passe par le centre Ω de la similitude, donc son image est une droite (Δ) passant par Ω telle que $(\delta, \Delta) = \dfrac{\pi}{4}$, en effet si nous décomposons la similitude en produit commutatif de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\sqrt{2}$ et de la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ alors (δ) est globalement invariante dans l'homothétie, il ne reste donc que la rotation.
(δ) est donc la droite d'équation $x = 1$.

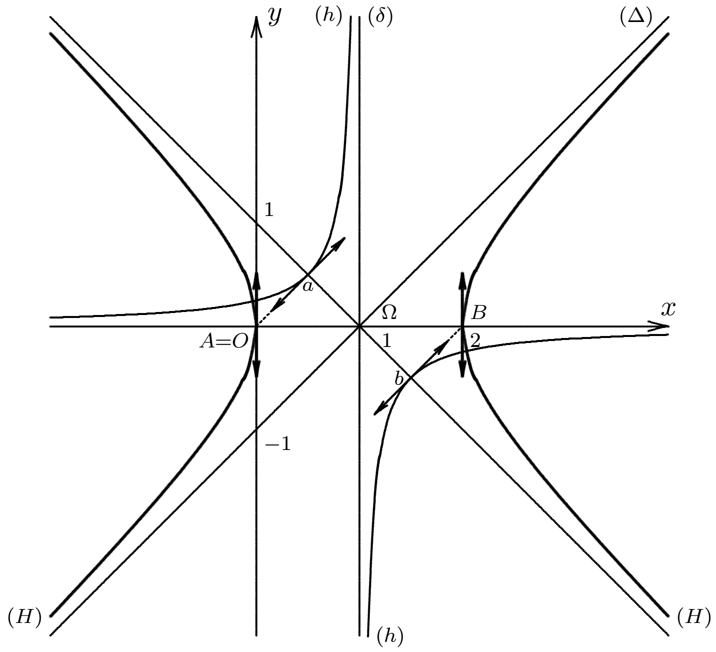


FIG. 1.2 – Représentation des hyperboles.

4. Pour obtenir l'équation de (H) transformée de (h) dans la similitude f, nous devons exprimer x et y coordonnées d'un point m de (h) en fonction de X et Y coordonnées d'un point M de (H).
Nous utilisons (1.8)

$$x + i\,y = \frac{1}{2}\,(1-i)\,(X + i\,Y) + \frac{1}{2}\,(1+i)\,,$$

soit en identifiant les parties réelles et imaginaires

$$x = \frac{1}{2}\,(X + Y + 1) \ \text{ et } y = \frac{1}{2}\,(-X + Y + 1)\,, \tag{1.10}$$

d'où en portant dans l'équation de (h)

$$\frac{1}{2}\,(-X + Y + 1) = \frac{1}{4\left(1 - \dfrac{1}{2}\,(X + Y + 1)\right)},$$

ce qui après calculs

$$X^2 - 2\,X - Y^2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)^2 - Y^2 = 1,$$

donne l'équation de (H) qui n'est autre qu'une hyperbole équilatère[#3] car la similitude f transforme une hyperbole équilatère en une hyperbole équilatère.

Les asymptotes de (H) sont déduites de celles de (h) par f, leurs équations sont

$$y = x - 1, \text{ c'est la droite } (\delta) \text{ et } y = -x + 1.$$

(H) coupe Ox aux points $A = (0, 0)$ et $B = (2, 0)$.

Les antécédents par f de ces points sont obtenus avec f^{-1} donné au (1.10)

$$a = f^{-1}(A) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } b = f^{-1}(B) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

5. La figure 1.2 est obtenue à l'aide des résultats précédents.
En particulier les triangles $Aa\Omega$ et $Bb\Omega$ sont rectangles isocèles.

1.3 Droite et cercle d'Euler

Nous proposons deux approches indépendantes de la droite et du cercle d'Euler ou cercle des neufs points du triangle.

Soit ABC un triangle d'orthocentre H (point de concours des hauteurs), de cercle circonscrit (Γ) de centre O (point de concours des médiatrices), et de centre de gravité G (point de concours des médianes).

On supposera que les trois points O, G et H sont distincts.

A', B' et C' sont les milieux des côtés respectifs $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Partie A : Utilisation du barycentre.

1. *Tracer avec précision, l'orthocentre H, le centre du cercle circonscrit O et le centre de gravité G, dans le cas d'un triangle acutangle[#4] et dans le cas d'un triangle ayant un angle obtus.*

2. ***Droite d'Euler***

Justifier l'égalité

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}.$$

Montrer que si A' est le milieu du segment $[BC]$ alors

$$3\,\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = 2\,\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{AH}. \tag{1.11}$$

En déduire que la vecteur $3\,\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.

Etablir que

$$3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH} \text{ puis que } 2\,\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AH}.$$

La droite OGH est la droite d'Euler du triangle.

Etablir que les cercles circonscrits aux triangles ABC, AHC, BHC et AHB sont égaux (On pourra utiliser le point O_1 tel que $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AH}$).

En déduire que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle sont situés sur le cercle circonscrit au triangle.

3. *Par définition : Si A, B, C et D sont quatre points d'une droite orientée $(O, \overrightarrow{u})$ alors (A, B, C, D) forment une division harmonique si*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

Montrer que si ω est le milieu du segment $[OH]$ alors (O, ω, G, H) forment une division harmonique.

[#3] Une hyperbole est dite équilatère si les deux asymptotes sont perpendiculaires.

[#4] Un triangle acutangle a tous ses angles aigus.

Partie B : Utilisation d'une homothétie.

Nous notons A_1, B_1 et C_1 les pieds des hauteurs du triangle ABC, noté T, a, b et c les milieux des segments respectifs $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.

1. *Soit H_A le symétrique de H par rapport à la droite (BC).*
Montrer que H_A est sur le cercle Γ.

2. *Soit A_0 le point diamétralement opposé à A.*
Montrer que A' est le milieu du segment $[A_0H]$ et que $\overrightarrow{OA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ et que la quadrilatère $aHA'O$ est un parallélogramme.

3. *Nous notons $h = \mathrm{hom}_{G,-1/2}$, l'homothétie de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.*
Déterminer $t = h(T)$.
En déduire que les points O, G et H vérifient la relation $\overrightarrow{GO} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.
Nous notons $\gamma = h(\Gamma)$ et ω le centre de (γ).
Montrer que ω est le centre du parallélogramme $\alpha HA'O$.
Déduire des questions précédentes que les points O, G, ω et H sont alignés.
Cette droite est la droite d'Euler du triangle.

4. *Etablir que le cercle (γ) passe par les neufs points remarquables A', B', C', A_1, B_1, C_1, a, b et c.*

Indication :
Revoir le barycentre : page 67 et l'homothétie : page 5, ainsi que la CNS pour que quatre points soient cocycliques. ★

Corrigé :

Partie A :

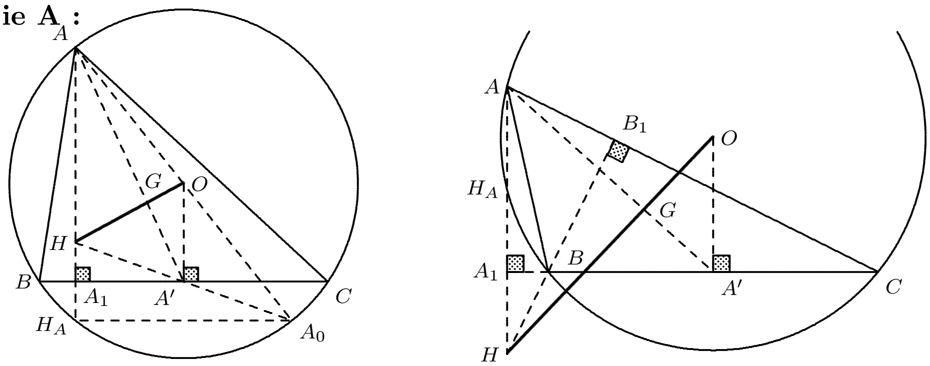


FIG 1.3 - Tracés des points remarquables d'un triangle.

1. Les tracés des points demandés est fait figure ci dessus.

2. La droite d'Euler.
Le centre de gravité est l'isobarycentre des points A, B et C, ce qui justifie l'égalité
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}.$$
Si A' est le milieu du segment $[BC]$ alors $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OA'}$ et en écrivant $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{AH}$ nous obtenons la réponse demandée en (1.11)
$$3\,\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = 2\,\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{AH}.$$

Le vecteur $2\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{AH}$ est orthogonal à la droite (BC) car les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{AH}$ le sont, donc d'après l'égalité ci-dessus, il en est de même pour le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$.

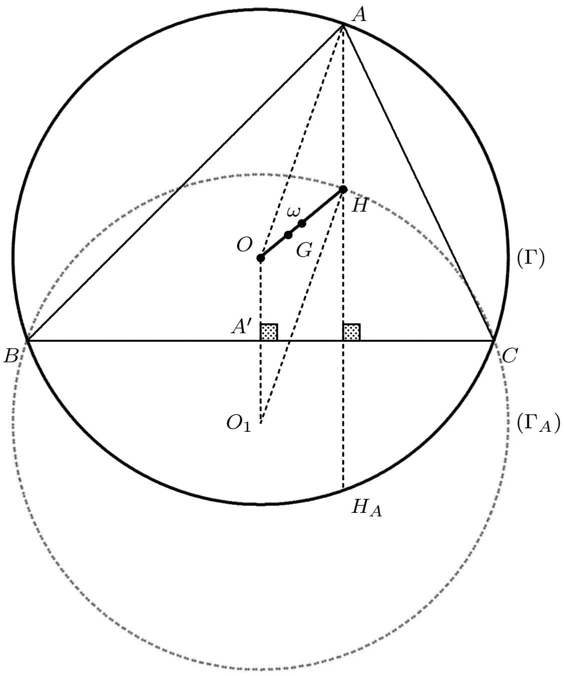


FIG 1.4 - Droite d'Euler et propriétés de l'orthocentre.

De manière analogue, nous montrerions que le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonal aux droites (CA) et (AB) et donc il ne peut être que nul.
Nous en déduisons que

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH} \text{ puis que } 2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AH}.$$

Nous notons (Γ_A) le symétrique du cercle circonscrit (Γ) au triangle ABC par rapport à la droite $(BC.)$
Nous avons $2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AH}$ et en particulier

$$OA = OB = OC = O_1H = O_1B = O_1C,$$

ce qui exprime que (Γ_A) est de centre O_1 et passe en particulier par B, C et H.
De manière analogue, nous montrerions que les cercles circonscrits (Γ_B) et (Γ_C) aux triangles AHC et AHB sont symétriques par rapport aux droites (AC) et (AB), donc égaux à (Γ).
Nous en déduisons que les symétriques H_A, H_B et H_C de l'orthocentre H par rapport aux côtés du triangle sont situés sur le cercle (Γ) circonscrit au triangle.

3. Si ω est le milieu du segment $[OH]$ alors sur l'axe orienté $(O, \overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OH}$ par exemple, nous avons

$$\overline{OH} = 1,\ \overline{OG} = \frac{1}{3} \text{ et } \overline{O\omega} = \frac{1}{2}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{\overline{\omega G}}{\overline{\omega H}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3},$$

ce qui prouve que

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = -\frac{\overline{\omega G}}{\overline{\omega H}}$$

et donc que la division $(O,\, \omega,\, G,\, H)$ est harmonique.

Partie B :

1. Les hauteurs (HC) et (HB) sont respectivement perpendiculaires aux côtés (AB) et (AC) donc

$$(AB,\, AC) = (HC,\, HB)\,.$$

H_A étant le symétrique de H par rapport à la droite (BC) alors

$$(H_AC,\, H_AB) = -\,(HC,\, HB)\,.$$

Il en résulte des deux expressions que

$$(AB,\, AC) = (H_AB,\, H_AC)\,,$$

ce qui exprime que le point H_A est sur (Γ) car les deux angles ci-dessus interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$.

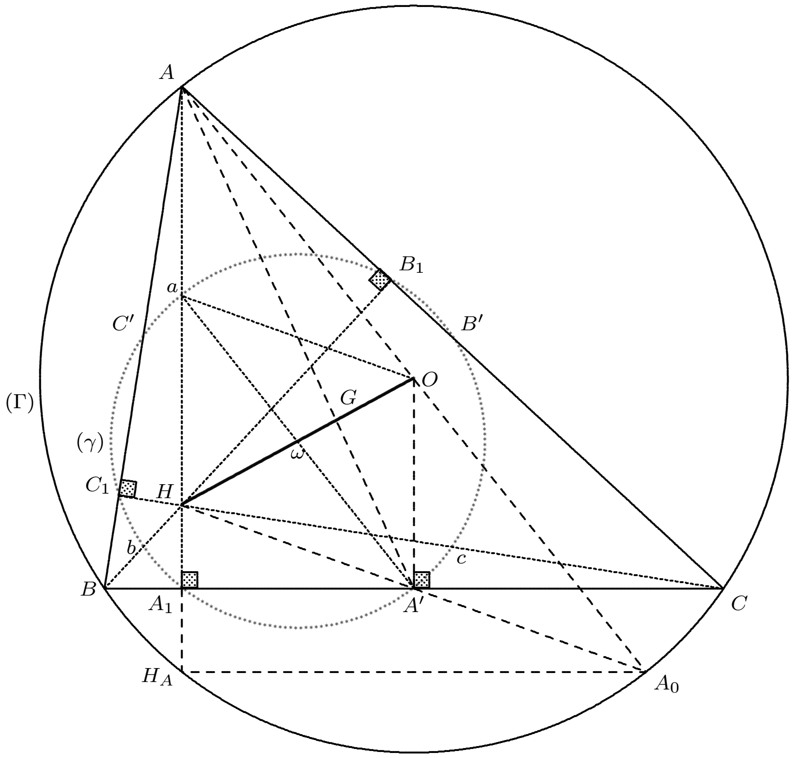


FIG. 1.5 – Cercle d'Euler.

2. Le triangle AH_AA_0 est rectangle en H_A car l'hypoténuse AA_0 est un diamètre de (Γ).

Il en résulte que les cordes $[BC]$ et $[H_AA_0]$ du cercle (Γ) sont parallèles et ainsi la médiatrice OA' de $[BC]$ est aussi médiatrice de $[H_AA_0]$ et par ailleurs (BC) est par hypothèse la médiatrice de $[HH_A]$. Ces deux résultats prouvent que A' n'est autre que le milieu de $[HA_0]$.

L'homothétie de centre A_0 et de rapport $\dfrac{1}{2}$ transforme A en O et H en A' donc $\overrightarrow{OA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.

En particulier si a est le milieu de $[AH]$ alors le quadrilatère $aHA'O$ est un parallélogramme.

3. G est tel que $\overrightarrow{GA'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ car isobarycentre des points A, B et C.

Il en résulte que le triangle t image de T par h est le triangle $A'B'C'$.

Les médiatrices de T sont les hauteurs de t donc Ω est l'orthocentre de t.

Ce résultat exprime que $O = h(H)$ car l'image de l'orthocentre de T est l'orthocentre de t

$$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}. \tag{1.12}$$

Ω est centre du cercle (Γ) circonscrit à T et ω celui du cercle (γ) circonscrit à t.

Ce résultat exprime que $\omega = h(O)$ car l'image du centre du cercle circonscrit à T est le centre du cercle circonscrit à t

$$\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}. \tag{1.13}$$

Il résulte des propriétés de l'homothétie h que

$$\overrightarrow{O\omega} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{HO},$$

ce résultat peut être aussi obtenu en retranchant membre à membre (1.12) et (1.13) .

Nous en déduisons que ω est le milieu du segment $[HO]$ et ainsi d'après **2**, que ω est le centre du parallélogramme $aHA'O$.

En particulier d'après (1.12) et (1.13) , les points O, G, ω et H sont alignés.

4. Le triangle aA_1A' est rectangle en A_1 donc le cercle (γ) passe par A_1.

Mutatis mutandis [#5] nous prouvons par permutation circulaire pour les points B et C que le cercle (γ) passe aussi par les points b, B_1, c, et C_1 (Ne pas oublier de (γ) est le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$, ce qui fait neuf points remarquables du triangle T.

Le cercle (γ) est appelé cercle d'Euler du triangle ou cercle des neuf points.

[#5] ie : de manière analogue.

Thème 2

Courbes paramétrées

Il est conseillé d'utiliser une calculatrice, ou le logiciel ***MatLab*** *pour représenter les courbes paramétrées proposées dans les problèmes qui suivent.*
Ne pas oublier une échelle appropriée et un pas bien choisi.
Revoir les exercices 2.2 à 2.8 : pages 34 à 43.

2.1 Fraction rationnelle

Le but de cet exercice est d'étudier la courbe paramétrée Γ d'équations paramétriques dans le repère orthogonal Oxy rapporté à la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, avec $\left\|\overrightarrow{j}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{i}\right\|$

$$x(t) = \frac{t}{t^2+1} \text{ et } y(t) = \frac{t+2}{2t}.$$

1. ***Réduction de l'intervalle d'étude.***
   Nous considérons le repère ΩXY déduit du repère Oxy dans une rotation telle que si $M = (X, Y)_{\Omega XY} = (x, y)_{Oxy}$ alors
   $$\begin{cases} x = -Y \\ y = X + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
   a) *Déterminer le centre R et l'angle θ de cette rotation.*
   b) *Donner les équations paramétriques de Γ dans le repère ΩXY.*
   En déduire que l'étude de Γ peut être faite sur l'intervalle $\mathcal{I}_1 =]0, +\infty[$ et que l'étude sur $\mathcal{I}_2 =]-\infty, 0[$ en est déduite par une symétrie que l'on précisera.
2. ***Asymptote.***
   Montrer que la droite d'équation $Y = 0$ est asymptote à la courbe Γ.
3. ***Tracé de la courbe Γ.***
   Etudier les variations des fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ sur $\mathcal{I}_1$.
   Construire Γ dans le repère ΩXY (cela sous entend que les valeurs des coordonnées des points marqués sont celles dans ce repère), il est demandé de préciser en particulier la valeur de t pour laquelle Γ admet une tangente horizontale, de tracer l'ancien repère Oxy et de positionner le point R.
4. ***Support de Γ.***
   Eliminer t entre X et Y, en déduire une équation cartésienne de la forme $Y = f(X)$ du support de Γ dans le repère ΩXY, puis dans le repère Oxy.
   Peut-on identifier Γ et son support ?
   Les valeurs de X pour lesquelles la dérivée seconde de f est nulle permettent de déterminer les points d'inflexions de la courbe Γ (Attention : la condition $f''(X) = 0$ est une condition nécessaire mais pas suffisante).

Déterminer les solutions de l'équation $f''(X) = 0$.

Donner les valeurs correspondantes de t.

*Préciser les points d'inflexions sur la courbe construite au **3.***

Indication :

Bien lire le texte et répondre aux questions qui sont posées, pas à d'autres.

Il sera utile de tourner l'écran donnant le tracé de la courbe de 90°, pour faire apparaître une fonction plus classique.

La figure doit être faite avec précision, notamment le centre de symétrie Ω de Γ et la tangente à Γ en ce point.

Ne pas oublier que la réduction de l'intervalle d'étude permet de diviser le temps d'étude par 2, rentable ... ★

Corrigé :

1. **Réduction de l'intervalle d'étude.**

a) Le point $R = (\alpha, \beta)$ est invariant dans la rotation de centre R et d'angle θ, ce qui exprime d'après les données que

$$\begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta = \alpha + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{4} \text{ et } \beta = \frac{1}{4}.$$

Remarquer que les coordonnées de R sont identiques dans les deux repères.

Les formules de changement de repère de Oxy vers ΩXY sont

$$\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X-\alpha \\ Y-\beta \end{pmatrix}$$

soit en identifiant avec l'énoncé

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{4} = -Y + \dfrac{1}{4} \\ y - \dfrac{1}{4} = X + \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + \dfrac{1}{4} \\ y - \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X + \dfrac{1}{4} \\ Y - \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

et nous obtenons $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$, soit $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Les relations de l'hypothèse donnent immédiatement pour équations paramétriques de la courbe Γ dans le repère ΩXY

$$\begin{cases} X(t) = \dfrac{1}{t} \\ Y(t) = -\dfrac{t}{t^2+1}. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\begin{cases} X(t) = -X(t) \\ Y(t) = -Y(t), \end{cases}$$

ce qui exprime que nous passons du point de paramètre t au point de paramètre $-t$ par une symétrie de centre Ω.

Ainsi cette symétrie donnera à partir de l'étude sur $\mathcal{I}_1$ celle sur $\mathcal{I}_2$.

2. **Asymptote.**

Si $t \to 0^+$ alors $X(t) \to +\infty$ et $Y(t) \to 0$, ce qui exprime que la droite $Y = 0$ est asymptote (horizontale dans ce repère) à la courbe Γ.

3. Tracé de la courbe Γ.

Sur l'intervalle $\mathcal{I}_1$ les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ sont dérivables

$$X'(t) = -\frac{1}{t^2} \text{ et } Y'(t) = \frac{t^2-1}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Nous en déduisons que X' est négatif pour tout t et que Y' est nul pour $t=1$, positif pour $t<1$ et négatif pour $t>1$.

X et Y admettent une limite nulle pour $t \to +\infty$, cela exprime que si nous considérons que les équations de la courbe Γ sont celles d'un mobile dont la position est donnée en fonction de t alors le mobile est en Ω pour $t=+\infty$ et en A pour $t=1$, en ce point la tangente est horizontale car $\overrightarrow{V_M} = (-1, 0)$.

Il en de même au point B correspondant à $t=-1$.

$X'(t)$ et $Y'(t)$ ont pour $t \to +\infty$,une limite nulle, ainsi la tangente au point Ω (correspondant à $t=+\infty$) ne peut être obtenue avec X' et Y'.

Par définition, la tangente au point Ω admet pour coefficient directeur en ce point la limite du coefficient directeur de la corde $c(t) = \Omega M$, où $M \in \Gamma$, lorsque $M \to \Omega$.

En fait nous avons pour $t=+\infty$, une demi tangente et une demi tangente de même coefficient directeur pour $t=-\infty$.

$$c(t) = \frac{Y(t)}{X(t)} = -\frac{t^2}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{\to} -1.$$

t	0		1		$+\infty$
X'	$\Vert$	$-$	-1	$-$	0
X	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0
Y	0	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	0
Y'		$-$	0	$+$	0

FIG. 2.1 – Variations de X et de Y.

Ce qui nous conduit à la représentation de la courbe Γ.

4. Support de Γ.

Nous exprimons t en fonction de X et nous portons dans Y

$$t = \frac{1}{X} \text{ et } Y = -\frac{\frac{1}{X}}{\left(\frac{1}{X}\right)^2+1} = -\frac{X}{X^2+1} = f(X).$$

Nous remarquons que la fonction f est impaire, ce qui confirme de la courbe Γ admet le point Ω pour centre de symétrie.

Le tracé sur la courbe Γ de différentes positions d'un mobile pour $t = 0^+$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1, $+\infty$, $-\infty$, -1, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et 0^-, prouve qu'il est possible d'identifier le support et Γ.

Nous rappelons que les points d'inflexion d'une courbe sont par définition les points où la courbe change de concavité.

La fonction f est dérivable au moins 2 fois (quotient de polynômes, dont le dénominateur est strictement positif)

$$f'(X) = \frac{X^2-1}{\left(X^2+1\right)^2} \text{ et } f''(X) = \frac{2X\left(-X^2+3\right)}{\left(X^2+1\right)^3}.$$