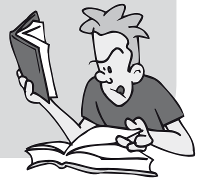
RAPPELS FONDAMENTAUX DE PREMIÈRE

1 COMMENT DÉTERMINER LE SIGNE D'UNE FONCTION AFFINE ? (RAPPELS DE SECONDE)



La détermination d'un signe est une compétence importante qui s'acquiert sur les trois années de lycée et sert dans de nombreux chapitres, en particulier au Bac.

On va donc commencer ici par la détermination du signe d'une expression de la forme $ax + b$ (forme générale des fonctions affines) où a et b sont des réels quelconques (avec $a \neq 0$).

On résout d'abord l'équation $ax + b = 0$ qui équivaut à $ax = -b$ ce qui équivaut à $x = -\frac{b}{a}$.

On a alors le signe de $ax + b$ qui est le signe opposé de a pour $x < -\frac{b}{a}$ et le signe de a pour $x > -\frac{b}{a}$.

Exemple : Étude du signe de $f(x) = -3x + 4$. On commence par résoudre $-3x + 4 = 0$, équation qui équivaut à $-3x = -4$ ce qui équivaut à $x = \frac{4}{3}$. On peut alors conclure en disant que $f(x)$ est positif (signe opposé de -3 qui est négatif) pour $x < \frac{4}{3}$ et négatif (signe de -3) pour $x > \frac{4}{3}$.

Les résultats se résument dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$	0	$-$	

Remarque : Pour chaque type d'expression dont on doit étudier le signe il existe une méthode particulière à connaître. Elles font appel soit à la résolution classique d'une inéquation, soit à l'utilisation de théorèmes particuliers.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

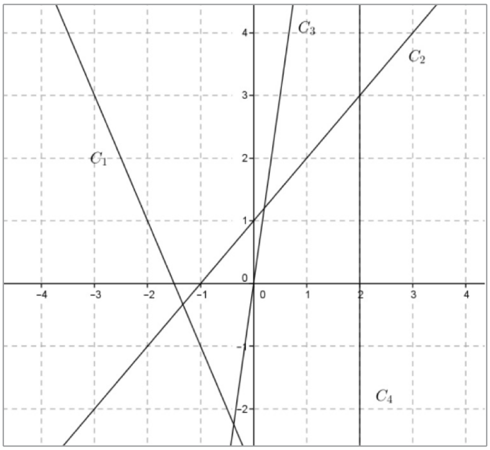
Exercice 1.1 (8 pts) *10 min*

Déterminer le signe des expressions suivantes :

1. $A = 2x + 5$ **2.** $B = \dfrac{-3}{2}x - 7$ **3.** $C = -11x$ **4.** $D = \sqrt{2}x + \sqrt{3}$

Exercice 1.2 (8 pts) *10 min*

On a tracé ci-dessous les courbes C_1, C_2 et C_3 représentant respectivement les fonctions affines f_1, f_2 et f_3 ainsi qu'une courbe C_4.



1. Pourquoi C_4 ne représente pas une fonction affine ?

2. La fonction f_3 est d'un type particulier, lequel ? Justifier.
Peut-on tout de même dire que f_3 est affine ?

3. Déterminer graphiquement le signe de f_1, f_2 et f_3.

4. On donne les expressions suivantes :

$$f_1(x) = -2x - 3 \qquad f_2(x) = x + 1 \qquad f_3(x) = 6x$$

Retrouver par le calcul les résultats du 3.

2 COMMENT RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ ET DÉTERMINER LE SIGNE D'UN TRINÔME ?

Après les fonctions affines, ce sont les polynômes du second degré, point fondamental du programme de première, qui sont à étudier que ce soit au niveau de leur signe comme au niveau de leurs racines.

Signe d'une expression de la forme ax^2+bx+c où a, b et c sont des réels quelconques (avec $a \neq 0$)
On calcule d'abord le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes sur $\mathbb{R}$:

  $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

  De plus, ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle des racines.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une seule solution sur $\mathbb{R}$: $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

  De plus, le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.

  De plus, le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Exemple : étude du signe de $-2x^2-6x+8$.
On calcule $\Delta = b^2-4ac = (-6)^2 - 4\times(-2)\times 8 = 100 > 0$
donc l'équation $-2x^2-6x+8=0$ a deux solutions distinctes qui sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times(-2)} = \frac{6-10}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times(-2)} = \frac{6+10}{-4} = \frac{16}{-4} = -4$$

Le coefficient de x^2 étant négatif (c'est –2), on a alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$-2x2-6x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 2.1 (8 pts) *20 min*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes

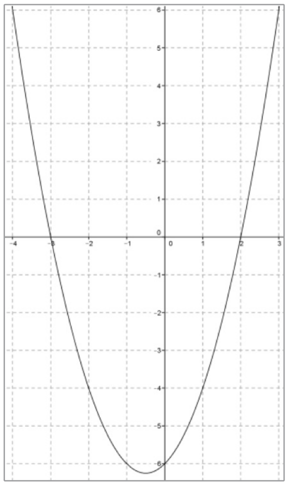
a. $x^2-5x+6=0$ **b.** $x^2+x+1=0$ **c.** $4x^2-12x+9\leq 0$

2. Déterminer le signe des expressions suivantes

a. $3x^2-2x+7$ **b.** $5x^2-x-3$ **c.** $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$

Exercice 2.2 (6 pts) *15 min*

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer graphiquement le signe de *f* sur l'intervalle [–4;3].

2. Déterminer graphiquement le sens de variations de *f* sur l'intervalle [–4;3].

3. On donne $f(x)=(x-2)(x+3)$.

a. Montrer que *f*(*x*) est un trinôme du second degré.

b. Retrouver par le calcul le résultat de la question 1.

c. Retrouver par le calcul le résultat de la question 2.

Exercice 2.3 (4 pts) *10 min*

On considère l'équation du second degré suivante : $x^2+mx-(m+1)=0$ où *x* est l'inconnue et *m* est un paramètre réel.

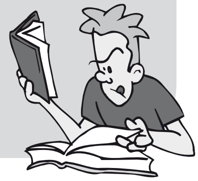
Déterminer les valeurs de *m* pour que l'équation ait :

1. Une solution dans $\mathbb{R}$.

2. Aucune solution dans $\mathbb{R}$.

3

COMMENT LIRE LE COEFFICIENT DIRECTEUR D'UNE DROITE ?



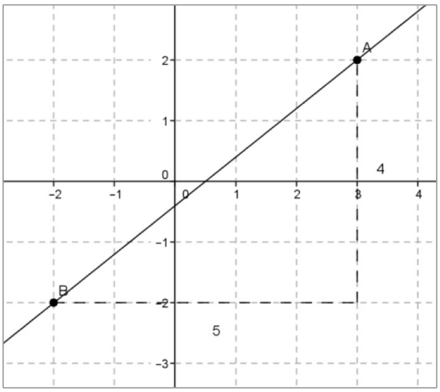
Les lectures graphiques sont souvent demandées au Bac en particulier celles concernant le nombre dérivé qui nécessitent de bien maîtriser la notion de coefficient directeur.

DÉFINITION

Soient A et B deux points de coordonnées respectives $\left(x_A;x_B\right)$ et $\left(y_A;y_B\right)$ dans un repère donné avec $x_A \neq x_B$. On appelle coefficient directeur de la droite (AB) le nombre $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Remarque : On suppose $x_A \neq x_B$ car, si ce n'est pas le cas, il y aurait une division par 0 dans le calcul du coefficient directeur. Si $x_A = x_B$, la droite (AB) est alors verticale et son coefficient directeur n'est pas défini.

Exemple : Dans la figure suivante, les points A et B ont pour coordonnées respectives (3;2) et (–2;–2). Le coefficient directeur de (AB) est donc : $\dfrac{-2-2}{-2-3} = \dfrac{-4}{-5} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.



Outre le fait de le calculer, il est également possible de simplement « lire » ce coefficient. Il suffit, pour l'exemple précédent, de partir du point B, de se décaler d'abord horizontalement de 5 puis verticalement de 4 pour atteindre le point A. On retrouve alors un coefficient directeur de $\dfrac{4}{5}$. Cette méthode est toutefois moins précise que par le calcul et nécessite une attention particulière en ce qui concerne les unités sur les axes.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

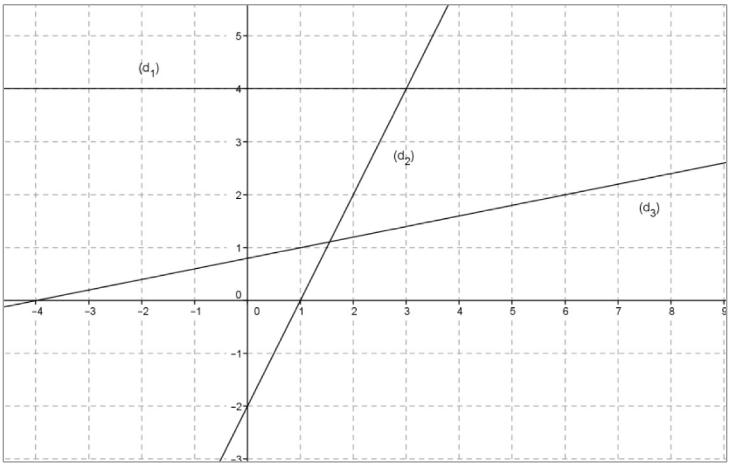
Exercice 3.1 (3 pts) *10 min*

On considère les points $A(2;-3)$, $B(5;-1)$ et $C\left(\frac{1}{3};0\right)$ dans un repère orthonormé.

Déterminer les coefficients directeurs des droites (AB), (AC) et (BC).

Exercice 3.2 (4,5 pts) *15 min*

Déterminer les coefficients directeurs des droites (d_1), (d_2) et (d_3) représentées ci-dessous.



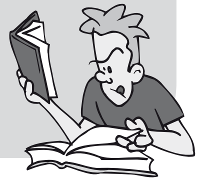
1. Par le calcul.
2. Par lecture graphique.

Exercice 3.3 (4 pts) *10 min*

Soient $A(-2;-7)$, $B(1;3)$ et $C(-1;11)$

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
2. On considère l'équation réduite $y = mx + p$ de la droite (d) passant par C et parallèle à (AB), combien vaut m ?
3. En utilisant le fait que (d) passe par C, déterminer le coefficient p de l'équation réduite de (d). On rappelle que deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont un même coefficient directeur.

4 QUEL EST LE LIEN ENTRE COEFFICIENTS DIRECTEURS ET NOMBRES DÉRIVÉS ?

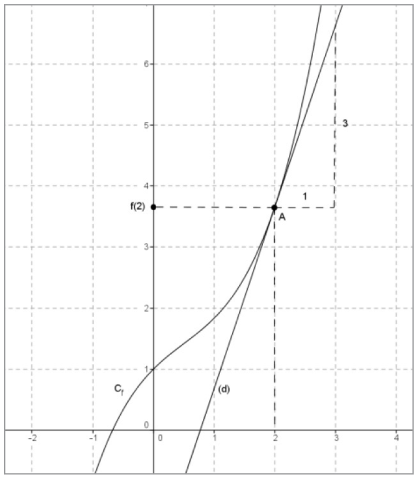


On ne reviendra pas ici sur la définition du nombre dérivé, on rappelle simplement que si une fonction *f* est dérivable en *x* = *a*, avec *a* réel, le nombre dérivé peut se lire graphiquement via la courbe représentative de *f* : c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.

Exemple : On considère la courbe C_f ci-contre, elle admet une tangente au point A d'abscisse 2 donc *f* est dérivable en 2

De plus, son nombre dérivé *f'*(2) est le coefficient directeur de la tangente (*d*) à la courbe en A.

Ici, le coefficient directeur de (*d*) est, par lecture graphique, 3 donc *f'*(2)=3.



On retrouve aussi les coefficients directeurs dans les équations des tangentes.

> **PROPRIÉTÉ**
>
> Soient *f* une fonction dérivable sur un intervalle I et *a* un réel de I. La courbe de la fonction *f* admet alors une tangente au point d'abscisse *a* dont l'équation est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

ex. Dans l'exemple ci-dessus, supposons déterminé par le calcul que *f*(2) soit égal à $\frac{-25}{3}$. La propriété précédente donne alors comme équation de (*d*) :

$$y = 2\left(x-2\right)+\frac{-25}{3}.$$

Ce qui équivaut (en développant et en réduisant) à $y = 2x - \frac{37}{3}$.