

Table des matières

1	Eléments de calcul tensoriel	13
1.1	Définitions générales	13
1.1.1	Tenseurs d'ordre 1	13
1.1.2	Produit tensoriel	14
1.1.3	Contraction d'un tenseur selon un couple d'indices	14
1.2	Tenseurs d'ordre 2	14
1.2.1	Matrice d'un tenseur d'ordre 2	14
1.2.2	Endomorphisme associé à un tenseur d'ordre 2	15
1.2.3	Contractions d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur	16
1.2.4	Contractions de deux tenseurs d'ordre 2	17
1.2.5	Double contraction de deux tenseurs d'ordre 2	17
1.2.6	Dérivée d'une fonction par rapport à un tenseur	18
1.3	Contractions d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2	18
1.4	Calcul différentiel sur les tenseurs	19
1.4.1	Gradient d'un champ de tenseurs	19
1.4.2	Divergence d'un champ de tenseurs	20
1.4.3	Théorème de la divergence	21
1.5	Formulaire de calcul différentiel sur les tenseurs	21
1.5.1	Coordonnées cartésiennes orthonormées	21
1.5.2	Coordonnées cylindriques	23
1.5.3	Coordonnées sphériques	24
1.6	Exercices	25
1.6.1	<i>Caractère intrinsèque de la contraction d'un tenseur sur un couple d'indices</i>	25
1.6.2	<i>Etude algébrique de la double contraction</i>	26
1.6.3	<i>Le produit tensoriel \otimes</i>	27
1.6.4	<i>L'algèbre des tenseurs isotropes d'ordre 4</i>	30
1.6.5	<i>Identités tensorielles remarquables</i>	32
1.6.6	<i>Etude du tenseur d'inertie</i>	33
1.6.7	<i>Théorème de Gauss (électrostatique, gravitationnel)</i>	35
1.6.8	<i>Calcul différentiel sur les tenseurs</i>	37

1.6.9	<i>Tenseur de Green du matériau isotrope</i>	40
1.6.10	<i>Rotationnel d'un champ de vecteurs</i>	42
2	Etude de la transformation géométrique d'un milieu continu	45
2.1	Transformation géométrique	45
2.2	Tenseurs de déformation	47
2.2.1	Transport des vecteurs matériels	47
2.2.2	Déformation de Green-Lagrange	48
2.2.3	Composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange	49
2.2.4	Transformation infinitésimale et tenseur de déformation linéarisé	51
2.2.5	Choix de la configuration de référence	52
2.2.6	Condition de compatibilité géométrique	53
2.2.7	Forme générale des solutions en déplacement	55
2.3	Description du mouvement par les vitesses	57
2.3.1	Vitesse lagrangienne et vitesse eulérienne	57
2.3.2	Taux de déformation volumique	57
2.3.3	Tenseur taux de déformation	58
2.3.4	Dérivées particulières d'un champ	59
2.3.5	Dérivées particulières d'une intégrale de volume	61
2.4	Exercices	63
2.4.1	<i>Etude d'une rotation infinitésimale</i>	63
2.4.2	<i>Direction invariante dans une transformation homogène</i>	65
2.4.3	<i>Expression d'une translation en coordonnées cylindriques</i>	67
2.4.4	<i>Etude d'une transformation géométrique</i>	67
2.4.5	<i>Dérivée temporelle de l'énergie cinétique</i>	69
2.4.6	<i>Extensions simples géométriquement compatibles</i>	70
2.4.7	<i>Compatibilité géométrique d'un champ de déformation constant par blocs</i>	71
2.4.8	<i>Compatibilité géométrique en déformations planes</i>	76
2.4.9	<i>Compatibilité géométrique d'un champ anisotrope</i>	77
2.4.10	<i>Conditions aux limites uniformes de Hashin : formulation en déformation</i>	79
2.4.11	<i>Déformations planes polynomiales</i>	82
2.4.12	<i>Compatibilité géométrique : A propos des solutions multivaluées</i>	83
2.4.13	<i>Champ de déplacement discontinu C^1 par morceaux : approche par la théorie des distributions</i>	85
2.4.14	<i>Description eulérienne des mouvements de corps rigides</i>	88
2.4.15	<i>Taux de déformation lagrangien et eulérien</i>	89
2.4.16	<i>Formulations eulérienne et lagrangienne de la liaison d'incompressibilité</i>	89
2.4.17	<i>Transport convectif d'un élément d'aire</i>	90

3	Contraintes dans un milieu continu tridimensionnel	93
3.1	Modélisation des efforts extérieurs	94
3.2	Lemme du tétraèdre	95
3.3	Tenseur des contraintes de Cauchy	97
3.3.1	Définition et interprétation physique	97
3.3.2	Equation de la dynamique - Equation d'équilibre	98
3.3.3	Symétrie du tenseur des contraintes	99
3.3.4	Cercles de Mohr	100
3.3.5	Discontinuités du champ de contraintes	102
3.4	Dualisation de l'équation de la dynamique	103
3.4.1	Théorème des puissances virtuelles	103
3.4.2	Théorème des travaux virtuels	104
3.4.3	Puissance et travail des efforts extérieurs dans le mouvement réel en condition quasistatique	104
3.5	Exercices	105
3.5.1	<i>Cercles de Mohr</i>	105
3.5.2	<i>Représentation lagrangienne des contraintes : tenseur de Piola-Kirchhoff</i>	108
3.5.3	<i>Représentation semi-lagrangienne des contraintes : tenseur de Boussinesq</i>	110
3.5.4	<i>Champ de contrainte constant par blocs</i>	113
3.5.5	<i>Conditions aux limites uniformes de Hashin ; formulation en contraintes</i>	115
3.5.6	<i>Discontinuité de contrainte</i>	118
3.5.7	<i>Régularité des contraintes : approche par la théorie des distributions</i>	120
3.5.8	<i>Théorème des travaux virtuels pour un champ de déplacement discontinu C^1 par morceaux</i>	122
3.5.9	<i>Forces à distance dépendant du sous-système</i>	123
4	Introduction au calcul à la rupture	127
4.1	Problématique du calcul à la rupture	127
4.2	Approche directe dans le cas tridimensionnel	129
4.3	Formulation de conditions nécessaires de stabilité	131
4.3.1	Matériau de von Mises	131
4.3.2	Généralisation à d'autres matériaux	133
4.3.3	Généralisation à des champs de déplacements discontinus C^1 par morceaux	134
4.4	Exercices	135
4.4.1	<i>Critère de Tresca</i>	135
4.4.2	<i>Mise en rotation d'un arbre cylindrique rigide encastré</i>	136
4.4.3	<i>Stabilité d'un talus vertical - 1</i>	139

4.4.4	<i>Fonction d'appui du matériau de von Mises</i>	141
4.4.5	<i>Fonction d'appui du matériau de Tresca</i>	142
4.4.6	<i>Stabilité d'un talus vertical - 2</i>	144
4.4.7	<i>Stabilité d'un talus vertical - 3</i>	147
4.4.8	<i>Fonction d'appui du critère de Green</i>	150
4.4.9	<i>Effondrement d'un corps sphérique sous poids propre</i>	151
4.4.10	<i>Poutre en flexion</i>	159
5	Comportement élastique du solide tridimensionnel	163
5.1	Comportement élastique en condition isotherme	164
5.2	Comportement thermoélastique	166
5.3	Inversion de la loi de comportement	167
5.4	Comportement thermoélastique linéaire	169
5.4.1	Développement limité quadratique de l'énergie libre	169
5.4.2	Inversion de la loi de comportement dans le cas linéaire	171
5.5	Comportement thermoélastique linéaire isotrope	172
5.5.1	Isotropie dans l'état initial naturel	172
5.5.2	Etat initial précontraint	176
5.6	Exercices	177
5.6.1	<i>Prise en compte d'effets inertiels dans la formulation de la loi de comportement élastique</i>	177
5.6.2	<i>Calcul tensoriel et élasticité linéaire isotrope</i>	178
5.6.3	<i>Tenseurs d'élasticité isotropes</i>	180
5.6.4	<i>Matériau élastique incompressible</i>	185
5.6.5	<i>Quelques résultats de convexité</i>	186
5.6.6	<i>Elasticité isotherme et élasticité adiabatique</i>	188
5.6.7	<i>Élasticité et linéarité</i>	189
5.6.8	<i>Loi de comportement élastique en transformation finie</i>	191
6	Problèmes d'élasticité tridimensionnelle	193
6.1	Définition du chargement	193
6.2	Définition de la solution d'un problème d'élasticité	195
6.3	Méthodes de résolution directes	196
6.3.1	Méthode de résolution par les contraintes	197
6.3.2	Méthode de résolution par les déplacements	198
6.4	Expérience de traction simple	200
6.4.1	Détermination de la solution	200
6.4.2	Interprétation de E et ν	202
6.5	Exercices	202
6.5.1	<i>Cavité circulaire dans un milieu infini sous cisaillement</i>	202
6.5.2	<i>Elastodynamique : vitesses de propagation dans un milieu élastique infini</i>	205

6.5.3	<i>Un problème d'élasticité linéaire incompressible</i>	207
6.5.4	<i>Contraintes gravitationnelles à l'échelle d'un astre : méthode directe par les contraintes</i>	208
6.5.5	<i>Contraintes gravitationnelles à l'échelle d'un astre : méthode directe par les déplacements</i>	211
6.5.6	<i>Milieu continu élastique infini soumis à une force ponctuelle</i> . . .	214
6.5.7	<i>Variation spatiale de la fonction de Green</i>	215
6.5.8	<i>Déformation d'origine électrostatique</i>	217
6.5.9	<i>Contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure</i>	223
6.5.10	<i>Traction uniaxiale en transformation finie</i>	229
6.5.11	<i>Contraintes thermiques</i>	231
6.5.12	<i>Potentiels de Neuber-Papkovich</i>	234
7	Approches variationnelles en élasticité linéaire	239
7.1	Principe de minimum de l'énergie potentielle	239
7.2	Intêret pratique du principe de minimum de l'énergie potentielle . .	242
7.3	Principe de minimum de l'énergie complémentaire	243
7.4	Conjonction des deux principes	245
7.4.1	Le cas général	245
7.4.2	Évolution isotherme à partir de l'état initial naturel	246
7.5	Exercices	247
7.5.1	<i>Calcul variationnel de l'énergie potentielle d'un milieu fissuré</i> . .	247
7.5.2	<i>Approche variationnelle de la compressibilité d'un solide comportant une cavité</i>	252
7.5.3	<i>Translation d'un arbre cylindrique dans un milieu élastique</i> . . .	258
7.5.4	<i>La méthode des éléments finis dans un contexte unidimensionnel</i>	262
7.5.5	<i>Un problème d'astrophysique : La limite de Roche</i>	271
7.5.6	<i>Un théorème de l'énergie mécanique</i>	275
7.5.7	<i>Aplatissement de la Terre - le géoïde de référence</i>	277
7.5.8	<i>Bornes de Voigt et Reuss</i>	281
8	Problèmes d'élasticité en déformations planes	285
8.1	Notion de fonction d'Airy	285
8.2	Représentation de la fonction d'Airy par des potentiels complexes .	287
8.2.1	Expression des contraintes	288
8.2.2	Expression des déplacements	290
8.3	Singularités de contraintes en fond de fissure	291
8.4	Annexe : Rappels sur les fonctions de la variable complexe	296
8.5	Exercices	297
8.5.1	<i>Calcul de la fonction $f(z)$ de (8.24) pour une pression uniforme</i> .	297
8.5.2	<i>A propos de la question de l'unicité du potentiel $\phi(z)$</i>	297
8.5.3	<i>Cavité circulaire sous pression</i>	298

8.5.4	<i>Cavité circulaire avec traction uniaxiale à l'infini</i>	300
8.5.5	<i>Etude d'un cisaillement : approche par fonction d'Airy et approche variationnelle en contraintes</i>	301
8.5.6	<i>Propagation d'une fissure dans une plaque</i>	306
8.5.7	<i>Propagation d'une fissure dans une pièce en extension</i>	312
9	Introduction à la mécanique des fluides	317
9.1	Généralités	317
9.1.1	Modèle de fluide parfait	317
9.1.2	Modèle de fluide visqueux newtonien	319
9.1.3	Le nombre de Reynolds de l'écoulement	320
9.2	Écoulement irrotationnel de fluide incompressible	322
9.2.1	Théorème de Bernoulli	322
9.2.2	Potentiel et fonction de courant	323
9.2.3	Potentiel complexe de l'écoulement	324
9.3	Exemples d'écoulements potentiels	325
9.3.1	Puits et source	325
9.3.2	Tourbillon ponctuel	326
9.3.3	Écoulement entre deux plans	327
9.3.4	Écoulement sans circulation autour d'un cylindre	328
9.3.5	Écoulement avec circulation autour d'un cylindre	329
9.4	Formule de Blasius pour le calcul de la résultante des efforts sur un obstacle	332
9.4.1	Le cas général	332
9.4.2	Application à l'écoulement autour d'un cylindre circulaire	333
9.5	Utilisation des transformations conformes	333
9.5.1	Définition	333
9.5.2	La transformation de Joukovski	334
9.5.3	Écoulement autour d'un cylindre de section quelconque	335
9.5.4	Point singulier d'un écoulement - Hypothèse de Kutta-Joukovski.	338
9.6	Annexe : expression de l'accélération	339
9.7	Introduction à la théorie de la couche limite	340
9.7.1	Motivation	340
9.7.2	Equations de la couche limite : forme adimensionnelle	341
9.7.3	Equations de la couche limite en variables dimensionnées	342
9.7.4	Solution autosemblable de Blasius	343
9.8	Exercices	346
9.8.1	<i>Fluide parfait barotrope</i>	346
9.8.2	<i>Trajectoires et lignes de courant</i>	347
9.8.3	<i>Etude d'une source jaillissant dans un bassin</i>	348
9.8.4	<i>Écoulement dans un coin à angle droit</i>	350

9.8.5	<i>Écoulement potentiel défini par une distribution continue de tourbillons ponctuels</i>	352
9.8.6	<i>Longueur caractéristique de la perturbation d'un écoulement par un obstacle</i>	355
9.8.7	<i>Moment des forces appliquées par un écoulement potentiel sur un obstacle - 1</i>	357
9.8.8	<i>Moment des forces appliquées par un écoulement potentiel sur un obstacle - 2</i>	358
9.8.9	<i>Étude d'un profil de Joukovski</i>	360
9.8.10	<i>Transformations conformes d'un cercle</i>	365
9.8.11	<i>Vitesse au bord de fuite d'un profil de Joukovski</i>	369
10	Milieux curvilignes	373
10.1	Transformation géométrique	373
10.1.1	Transformation géométrique d'un arc	373
10.1.2	Description du mouvement d'un arc par les vitesses	377
10.1.3	Transformation géométrique d'une structure	380
10.2	Efforts extérieurs et intérieurs	383
10.2.1	Efforts extérieurs et intérieurs dans un arc	383
10.2.2	Dualisation des équations de la statique; théorème des puissances virtuelles	387
10.2.3	Efforts extérieurs et intérieurs dans une structure	388
10.2.4	Hypothèse des petits déplacements et applications	391
10.2.5	Structure plane chargée dans son plan	395
10.3	Structures élastiques	396
10.3.1	Cadre de l'étude	397
10.3.2	Formulation du comportement élastique	398
10.3.3	Calcul des structures élastiques	400
10.4	Annexes	410
10.4.1	Rotation infinitésimale	410
10.4.2	Courbure d'un arc plan	411
10.5	Exercices	411
10.5.1	<i>Statique des poutres</i>	411
10.5.2	<i>Compatibilité des déformations d'un système de barres articulées</i>	413
10.5.3	<i>Étude d'un système hyperstatique</i>	414
10.5.4	<i>Illustration du théorème de Castigliano</i>	416
10.5.5	<i>Poutre élastique périodique</i>	419
10.5.6	<i>Elasticité des poutres</i>	421
10.5.7	<i>Poutre inclinée soumise à une compression</i>	424
10.5.8	<i>Application du calcul à la rupture à une poutre en flexion</i>	426
10.5.9	<i>Éléments finis en flexion</i>	427
10.5.10	<i>Une tentative de modélisation simplifiée du « longbow »</i>	431