Chapitre 1

Eléments de calcul tensoriel

On se limite ici à une présentation succinte des notions de calcul tensoriel nécessaires pour l'étude du solide élastique tridimensionnel.

Convention d'Einstein :
On munit un espace vectoriel euclidien de dimension finie E d'une base orthonormée $(\underline{e}_i)$ $(1 \leq i \leq p)$ et l'on note u_i la i-ième composante du vecteur $\underline{u}$. Sauf mention explicite du contraire, on adopte la convention de sommation sur les indices répétés, dite convention d'Einstein : si un même indice figure 2 fois dans une expression, il y a sommation sur cet indice.
exemples :
Le vecteur $\underline{u}$ peut s'écrire $u_i\underline{e}_i$.
Le produit scalaire $\underline{a} \cdot \underline{b}$ peut s'écrire a_ib_i.
Le produit de matrices $AX = Y$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ a pour terme général $Y_i = A_{ij}X_j$. On dit parfois que i est un indice libre (ou franc) et j est un indice muet.

1.1 Définitions générales

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On appelle tenseur d'ordre n une forme n-linéaire sur E, c'est-à-dire une application de E^n dans $\mathbb{R}$ qui est linéaire par rapport à chacun de ses n arguments.

1.1.1 Tenseurs d'ordre 1

Etant de dimension finie, E est isomorphe à son dual E*. Ainsi, au vecteur $\underline{a}$, il est possible d'associer la forme linéaire $a^\star$ telle que $(\forall \underline{u})\, a^\star(\underline{u}) = \underline{a} \cdot \underline{u}$. Grâce à cet isomorphisme, on convient d'identifier le vecteur $\underline{a}$ et la forme linéaire $a^\star$, de sorte que les vecteurs peuvent être considérés comme des tenseurs d'ordre 1.

C'est pourquoi on adopte la convention de les noter de la même façon, par une lettre soulignée une fois [1]. Dans le même esprit, on pourra souligner [2] n fois la lettre désignant un tenseur d'ordre n.

1.1.2 Produit tensoriel

Etant donnés deux tenseurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ d'ordres respectifs p et q, on appelle produit tensoriel de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ et l'on note $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'$ le tenseur d'ordre $p+q$ défini par :

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_p, \underline{u}_{p+1}, \ldots, \underline{u}_{p+q}) = \mathcal{T}(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_p)\mathcal{T}'(\underline{u}_{p+1}, \ldots, \underline{u}_{p+q}) \tag{1.1}$$

L'extension au produit tensoriel de n tenseurs est immédiate. Ainsi, on appelle produit tensoriel des n vecteurs $\underline{a}_i$ le tenseur d'ordre n suivant :

$$\underline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \underline{a}_n(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n) = (\underline{a}_1 \cdot \underline{u}_1) \times \cdots \times (\underline{a}_n \cdot \underline{u}_n) \tag{1.2}$$

1.1.3 Contraction d'un tenseur selon un couple d'indices

Soit $\mathcal{T}$ un tenseur d'ordre p. On appelle contraction de $\mathcal{T}$ selon ses deux derniers indices le tenseur $\mathcal{T}^c$ d'ordre $p-2$ défini de la façon suivante :

$$\mathcal{T}^c(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{p-2}) = \mathcal{T}(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{p-2}, \underline{e}_i, \underline{e}_i) \tag{1.3}$$

On vérifie sans peine (exercice 1.6.1) que cette définition est indépendante du choix de la base $(\underline{e}_i)$. En modifiant la place des $\underline{e}_i$ dans le p-uplet, il est évidemment possible de contracter $\mathcal{T}$ selon un couple arbitraire d'indices.
A titre d'exemple, la contraction du produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b}$ selon ses deux indices n'est autre que le produit scalaire de ces vecteurs :

$$\underline{a} \otimes \underline{b}(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = a_i b_i = \underline{a} \cdot \underline{b} \tag{1.4}$$

1.2 Tenseurs d'ordre 2

1.2.1 Matrice d'un tenseur d'ordre 2

Les tenseurs d'ordre 2 sont les formes bilinéaires sur E. On convient de souligner 2 fois la lettre désignant un tenseur d'ordre 2. La matrice du tenseur $\underline{\underline{T}}$ dans la base $(\underline{e}_i)$ est une matrice carrée de terme général

$$T_{ij} = \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \tag{1.5}$$

1. Cette convention remplace la notation des vecteurs par une lettre surmontée d'une flèche.
2. Cette convention peut évidemment alourdir l'écriture. On ne l'utilisera ici que pour $n \leq 2$.

où $\underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$ est le scalaire obtenu en appliquant la forme bilinéaire $\underline{\underline{T}}$ au couple de vecteurs $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$. En vertu de la linéarité de $\underline{\underline{T}}$ par rapport à chacun de ses arguments, on note que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(u_i \underline{e}_i, v_j \underline{e}_j) = T_{ij} u_i v_j \tag{1.6}$$

On note $\underline{\underline{\delta}}$ le tenseur dont la matrice a pour terme d'indice ij le symbole de Kronecker δ_{ij}. D'après (1.6), le tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ n'est autre que le produit scalaire :

$$\underline{\underline{\delta}}(\underline{u}, \underline{v}) = \delta_{ij} u_i v_j = \underline{u} \cdot \underline{v} \tag{1.7}$$

${}^t\underline{\underline{T}}$ désigne le transposé du tenseur $\underline{\underline{T}}$ défini de la façon suivante :

$${}^t\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) \tag{1.8}$$

D'après (1.5), on observe que les matrices de $\underline{\underline{T}}$ et ${}^t\underline{\underline{T}}$ sont transposées l'une de l'autre. Un tenseur d'ordre 2 est dit symétrique (resp. antisymétrique) s'il vérifie $\underline{\underline{T}} = {}^t\underline{\underline{T}}$ (resp. $\underline{\underline{T}} = -{}^t\underline{\underline{T}}$).
Le produit tensoriel des deux vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$, noté $\underline{a} \otimes \underline{b}$, constitue un exemple important de tenseur d'ordre 2. Conformément à la définition (1.2), on a :

$$(\forall \underline{u})(\forall \underline{v}) \quad \underline{a} \otimes \underline{b}(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) \tag{1.9}$$

Il résulte immédiatement de (1.5) que le terme général de la matrice de $\underline{a} \otimes \underline{b}$ est égal à $a_i b_j$. En particulier, le terme d'indice ij de la matrice de $\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta$ est le scalaire $\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}$.
Partant de (1.6) et compte tenu de (1.9), nous obtenons :

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = T_{ij} u_i v_j = \left(T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\right) (\underline{u}, \underline{v}) \tag{1.10}$$

La famille des produits tensoriels $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ constitue donc une base [1] de l'espace des tenseurs d'ordre 2 :

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{1.11}$$

1.2.2 Endomorphisme associé à un tenseur d'ordre 2

Au tenseur $\underline{\underline{T}}$, on associe l'endomorphisme T de même matrice. On a donc :

$$T(\underline{e}_j) = T_{ij} \underline{e}_i \tag{1.12}$$

On vérifie alors sans peine que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}.T(\underline{v}) \tag{1.13}$$

1. D'après (1.10), la famille en question est manifestement génératrice. On vérifiera sans peine qu'elle est libre.

On définit par ce procédé un isomorphisme de l'espace des tenseurs d'ordre 2 sur l'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel E. Cet isomorphisme permet d'étendre aux tenseurs certains concepts propres aux endomorphismes, tels que l'inverse, le déterminant, la trace ...
Lorsque T est inversible, on appelle inverse du tenseur $\underline{\underline{T}}$, et l'on note $\underline{\underline{T}}^{-1}$, le tenseur associé à l'endomorphisme T^{-1}.
On appelle déterminant (resp. trace) du tenseur $\underline{\underline{T}}$, et l'on note $\det \underline{\underline{T}}$ (resp. $\operatorname{tr} \underline{\underline{T}}$) le déterminant (resp. la trace) de l'endomorphisme associé :

$$\det \underline{\underline{T}} = \det T \quad ; \quad \operatorname{tr} \underline{\underline{T}} = \operatorname{tr} T \tag{1.14}$$

On remarque que l'endomorphisme associé au tenseur $\underline{\underline{\delta}}$ (voir (1.7)) n'est autre que l'identité de l'espace vectoriel.

1.2.3 Contractions d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur

On appelle produit contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{v}$ et l'on note $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}$ le vecteur [1] obtenu en contractant $\underline{\underline{T}} \otimes \underline{v}$ selon les deux derniers indices. En utilisant l'équivalence vecteur-tenseur d'ordre 1 et la définition (1.3), on obtient :

$$(\forall \underline{u}) \;\; \underline{u} \cdot \left(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}\right) = (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v})(\underline{u}) = \underline{\underline{T}} \otimes \underline{v}(\underline{u}, \underline{e}_j, \underline{e}_j) = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{e}_j)\underline{v} \cdot \underline{e}_j = u_i T_{ij} v_j = \underline{u} \cdot T(\underline{v}) \tag{1.15}$$

Il en résulte que

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = T(\underline{v}) \tag{1.16}$$

En comparant (1.13) et (1.15), on observe en outre que

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}) \tag{1.17}$$

Par exemple, dans le cas particulier $\underline{\underline{T}} = \underline{a} \otimes \underline{b}$, (1.17) s'écrit [2]

$$(\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) = \underline{u} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v}) \tag{1.18}$$

On en déduit que

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v} = \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{v}) \tag{1.19}$$

On appelle produit contracté de $\underline{v}$ et de $\underline{\underline{T}}$ et l'on note $\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}$ le vecteur obtenu en contractant $\underline{v} \otimes \underline{\underline{T}}$ selon les deux premiers indices :

$$(\forall \underline{u}) \;\; \left(\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}}\right) \cdot \underline{u} = \underline{v} \otimes \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_i, \underline{u}) = v_i \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{u}) = v_i T_{ij} u_j = \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) = {}^t\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) \tag{1.20}$$

1. Respectivement le tenseur d'ordre 1.
2. Dans la notation $\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{v}$ du produit contracté de $\underline{a} \otimes \underline{b}$ et $\underline{v}$, il n'y a pas d'ambiguité étant donné que le produit tensoriel lie les vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$.

L'application de (1.17) à ${}^t\underline{\underline{T}}$ donne

$$ {}^t\underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v}) = \underline{u}\cdot\left({}^t\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v}\right) \tag{1.21}$$

En utilisant ce résultat dans (1.20), on a finalement :

$$\underline{v}\cdot\underline{\underline{T}} = {}^t\,\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v} \tag{1.22}$$

On déduit au passage de (1.19) et de (1.22) que

$$\underline{v}\cdot\underline{a}\otimes\underline{b} = (\underline{v}\cdot\underline{a})\underline{b} \tag{1.23}$$

En rapprochant (1.17) et (1.22), on observe que l'on a :

$$\underline{u}\cdot(\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v}) = {}^t\,\underline{\underline{T}}(\underline{v},\underline{u}) = \underline{v}\cdot({}^t\underline{\underline{T}}\cdot\underline{u}) = (\underline{u}\cdot\underline{\underline{T}})\cdot\underline{v} \tag{1.24}$$

En définitive, l'ordre des parenthèses étant indifférent, on choisit de noter $\underline{u}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v}$ le scalaire $\underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v})$:

$$\underline{u}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v} = \underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v}) = \underline{u}\cdot(\underline{\underline{T}}\cdot\underline{v}) = (\underline{u}\cdot\underline{\underline{T}})\cdot\underline{v} \tag{1.25}$$

1.2.4 Contractions de deux tenseurs d'ordre 2

Soient $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}'$ deux tenseurs d'ordre 2 associés respectivement aux endomorphismes T et T'. On appelle produit contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}'$ et l'on note $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}'$ le tenseur d'ordre 2 obtenu en contractant $\underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{T}}'$ selon les indices 2 et 3. On a donc

$$\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}'(\underline{e}_i,\underline{e}_j) = \underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{T}}'(\underline{e}_i,\underline{e}_k,\underline{e}_k,\underline{e}_j) = T_{ik}T'_{kj} \tag{1.26}$$

La matrice de $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}'$ ayant pour terme d'indice ij le scalaire $T_{ik}T'_{kj}$, $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}'$ est donc le tenseur associé à l'endomorphisme $T\circ T'$. En particulier, étant associé à l'endomorphisme identité de l'espace vectoriel, le produit $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1}$ n'est autre que le produit scalaire :

$$\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{\delta}} \tag{1.27}$$

$\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}^{-1}$ sont donc inverses pour le produit contracté des tenseurs d'ordre 2.
À titre d'exemple, considérons le produit contracté des tenseurs $\underline{a}\otimes\underline{b}$ (terme général a_ib_j) et $\underline{c}\otimes\underline{d}$ (terme général c_id_j). D'après (1.26), le terme d'indice ij de la matrice de $\underline{a}\otimes\underline{b}\cdot\underline{c}\otimes\underline{d}$ est $a_ib_kc_kd_j$, soit $(\underline{b}\cdot\underline{c})a_id_j$. On a donc :

$$\underline{a}\otimes\underline{b}\cdot\underline{c}\otimes\underline{d} = (\underline{b}\cdot\underline{c})\,\underline{a}\otimes\underline{d} \tag{1.28}$$

1.2.5 Double contraction de deux tenseurs d'ordre 2

On appelle produit doublement contracté de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{T}}'$ et l'on note $\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}'$ le scalaire obtenu en contractant $\underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{T}}'$ selon les couples d'indices (2,3) et (1,4) :

$$\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{T}}'(\underline{e}_i,\underline{e}_j,\underline{e}_j,\underline{e}_i) = T_{ij}T'_{ji} \tag{1.29}$$

On observe que $\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}'$ n'est autre que la trace du produit contracté $\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}'$. La double contraction des tenseurs d'ordre 2 est donc une opération commutative :

$$\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{T}}' = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}}':\underline{\underline{T}} \tag{1.30}$$

1.2.6 Dérivée d'une fonction par rapport à un tenseur

On considère une fonction scalaire ψ de la variable tensorielle $\underline{\underline{T}}$. On suppose que ψ est dérivable par rapport aux composantes T_{ij}. On a donc :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial T_{ij}} dT_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial T_{ij}} \left(\underline{e}_j \otimes \underline{e}_i : d\underline{\underline{T}} \right) \tag{1.31}$$

On pose

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{T}}} = \frac{\partial \psi}{\partial T_{ij}} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{1.32}$$

Avec cette notation, (1.31) s'écrit encore

$$d\psi = \frac{{}^t\partial \psi}{\partial \underline{\underline{T}}} : d\underline{\underline{T}} \tag{1.33}$$

Ceci constitue la définition intrinsèque de la dérivée de ψ par rapport à $\underline{\underline{T}}$.

1.3 Contractions d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2

Soit $\mathbb{C}$ un tenseur d'ordre 4. On pose

$$C_{ijkl} = \mathbb{C}(\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k, \underline{e}_l) \tag{1.34}$$

Avec le même raisonnement qu'en (1.11), on obtient :

$$\mathbb{C} = C_{ijkl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \tag{1.35}$$

Le produit doublement contracté $\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}$ est défini comme la contraction de $\mathbb{C} \otimes \underline{\underline{T}}$ selon les couples d'indices (4,5) et (3,6). C'est donc un tenseur d'ordre 2. Le terme d'indice ij de la matrice de $\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}$ vaut :

$$\underline{e}_i \cdot \left(\mathbb{C} : \underline{\underline{T}} \right) \cdot \underline{e}_j = \mathbb{C} \otimes \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k, \underline{e}_l, \underline{e}_l, \underline{e}_k) = C_{ijkl} T_{lk} \tag{1.36}$$

de sorte que

$$\mathbb{C} : \underline{\underline{T}} = C_{ijkl} T_{lk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{1.37}$$

On définit également le produit doublement contracté $\underline{\underline{T}} : \mathbb{C}$. C'est le tenseur d'ordre 2 obtenu en contractant le tenseur $\underline{\underline{T}} \otimes \mathbb{C}$ selon les couples d'indices (1,4) et (2,3). On obtient sans peine :

$$\underline{\underline{T}} : \mathbb{C} = T_{lk} C_{klij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{1.38}$$

Notons que l'égalité $\underline{\underline{T}} : \mathbb{C} = \mathbb{C} : \underline{\underline{T}}$ n'a lieu que si la matrice du tenseur $\mathbb{C}$ possède la propriété de symétrie $C_{klij} = C_{ijkl}$.
On dispose enfin de l'identité suivante :

$$\left(\underline{\underline{T}} : \mathbb{C}\right) : \underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}} : \left(\mathbb{C} : \underline{\underline{T}}'\right) = T_{ji} C_{ijkl} T'_{lk} \tag{1.39}$$

L'ordre des parenthèses étant indifférent, le scalaire ci-dessus pourra être noté $\underline{\underline{T}} : \mathbb{C} : \underline{\underline{T}}'$.

1.4 Calcul différentiel sur les tenseurs

On suppose désormais que la base $(\underline{e}_i)$ est *cartésienne* et orthonormée. Les calculs sont explicités dans cette base. Néanmoins, une définition intrinsèque des opérateurs différentiels est systématiquement présentée.

1.4.1 Gradient d'un champ de tenseurs

On considère pour commencer un champ de vecteurs [1], c'est-à-dire une application $\underline{X} \to \underline{\Phi}(\underline{X})$ définie sur un domaine [2] Ω. On suppose que les composantes Φ_i sont différentiables. On a donc

$$d\underline{\Phi} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial X_j} dX_j = \left(\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j\right) \cdot \underline{dX} \tag{1.40}$$

Il existe donc un tenseur d'ordre 2 reliant les différentielles $\underline{dX}$ et $d\underline{\Phi}$. Il sera noté $\underline{\underline{\nabla \Phi}}$ [3] :

$$d\underline{\Phi} = \underline{\underline{\nabla \Phi}} \cdot \underline{dX} \tag{1.41}$$

D'après (1.40), on a

$$\underline{\underline{\nabla \Phi}} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{1.42}$$

(1.41) constitue la définition intrinsèque du gradient [4] de $\underline{\Phi}$. Elle permet notamment de déterminer $\underline{\underline{\nabla \Phi}}$ dans un système de coordonnées non nécessairement cartésien orthonormé. À titre d'exemple, calculons le gradient du champ de vecteurs $\underline{e}_r$ en coordonnées cylindriques. On remarque d'abord que l'on a $d\underline{e}_r = \underline{e}_\theta d\theta$. Puis l'on écrit la différentielle $d\underline{X}$ en fonction des différentielles des coordonnées cylindriques :

$$d\underline{X} = dr\, \underline{e}_r + r\, d\theta\, \underline{e}_\theta + dz\, \underline{e}_z \tag{1.43}$$

1. Respectivement de tenseurs d'ordre 1.
2. Dans la pratique, Ω sera une partie de $\mathbb{R}^3$.
3. On utilisera le cas échéant la notation $\underline{\underline{\mathrm{grad}\, \Phi}}$.
4. Elle montre que la matrice de $\underline{\underline{\nabla \Phi}}$ dans une base cartésienne orthonormée n'est autre que la matrice jacobienne.

On en déduit que $r\, d\theta = \underline{e}_\theta \cdot d\underline{X}$ dont on tire finalement

$$d\underline{e}_r = \underline{e}_\theta d\theta = \frac{1}{r}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \cdot d\underline{X} \Rightarrow \underline{\underline{\nabla e_r}} = \frac{1}{r}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \tag{1.44}$$

Soit à présent $\underline{X} \to \mathcal{T}(\underline{X})$ un champ de tenseurs d'ordre p. L'égalité (1.40) se généralise immédiatement sous la forme suivante :

$$d\mathcal{T} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial X_j} dX_j = \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j\right) \cdot \underline{dX} \tag{1.45}$$

Le gradient $\nabla\mathcal{T}$ reliant linéairement les différentielles $\underline{dX}$ et $d\mathcal{T}$ est donc un tenseur d'ordre $p+1$. Il est défini de façon intrinsèque par

$$d\mathcal{T} = \nabla\mathcal{T} \cdot \underline{dX} \tag{1.46}$$

et dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées par

$$\nabla\mathcal{T} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial X_j} \otimes \underline{e}_j \tag{1.47}$$

1.4.2 Divergence d'un champ de tenseurs

On considère un champ de tenseurs $\mathcal{T}$ d'ordre $p \geq 1$. On appelle divergence de $\mathcal{T}$, et l'on note $\operatorname{div}\mathcal{T}$, la contraction de $\nabla\mathcal{T}$ selon ses deux derniers indices. $\operatorname{div}\mathcal{T}$ est donc un tenseur d'ordre $p-1$.
Dans le cas d'un champ de vecteurs, on déduit de (1.4) et de (1.42) que

$$\operatorname{div}\underline{\Phi} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}\delta_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_i} \tag{1.48}$$

En coordonnées non cartésiennes orthonormées, on utilisera la définition intrinsèque. Ainsi, d'après (1.4) et (1.44), nous obtenons immédiatement $\operatorname{div}\underline{e}_r = 1/r$. Dans le cas d'un champ de tenseurs d'ordre 2, le gradient est un tenseur d'ordre 3. D'après (1.11) et (1.47), on a en effet

$$\underline{\underline{\underline{\nabla T}}} = \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial X_k} \otimes \underline{e}_k = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \tag{1.49}$$

La contraction d'un produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c}$ selon les indices 2 et 3 est égale, par définition, à $\underline{a} \otimes \underline{b} \cdot \underline{c}$ et vaut donc $\underline{a}\,(\underline{b} \cdot \underline{c})$ (voir section 1.2.3 et (1.19)). On a donc

$$\operatorname{div}\underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k}\underline{e}_i\delta_{jk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j}\,\underline{e}_i \tag{1.50}$$