

# TABLE DES MATIÈRES

## I – Courbes

I.1.	Courbes dans $\mathbb{R}^n$ , généralités . . . . .	1
I.2.	Longueur d'un arc de courbe . . . . .	2
I.3.	Paramétrisation par la longueur d'arc . . . . .	3
I.4.	Courbure des courbes du plan . . . . .	4
I.5.	Exemples de courbes du plan . . . . .	6
I.6.	Courbes et isométries du plan . . . . .	7
I.7.	Courbes du plan définies par une équation implicite $f(x, y) = 0$ . . . . .	8
I.8.	Courbes : étude locale d'une courbe au voisinage d'un point singulier et branches infinies . . . . .	14
I.9.	Courbes dans l'espace $\mathbb{R}^3$ . . . . .	15
I.10.	Exercices . . . . .	20

## II – Surfaces

II.1.	Définition, exemples, plan tangent. . . . .	25
II.2.	Exemples de surfaces : les quadriques. . . . .	26
II.3.	Courbes tracées sur des surfaces de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	26
II.4.	La première forme fondamentale. . . . .	32
II.5.	La seconde forme fondamentale. . . . .	34
II.6.	Le « Theorema Egregium » de Gauss . . . . .	38
II.7.	Théorème de Gauss–Bonnet et formule de Girard. . . . .	38
II.8.	Exercices . . . . .	39

## III – Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

III.1.	Rappels des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel . . . . .	45
III.2.	Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	45
III.3.	Applications : le théorème de Lagrange et le lemme de Morse . . . . .	47
III.4.	Exercices . . . . .	50

**IV – Formes différentielles sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$** 

IV.1.	Notion de 1-forme différentielle et intégrale d'une 1-forme différentielle sur un arc de courbe . . . . .	53
IV.2.	Notion de $k$ -forme différentielle . . . . .	54
IV.3.	L'algèbre extérieure et la différentielle . . . . .	55
IV.4.	Formes différentielles et changement de coordonnées . . . . .	56
IV.5.	Exercices . . . . .	57

**V – Systèmes différentiels**

V.1.	Le théorème fondamental d'existence des solutions des équations différentielles . . . . .	59
V.2.	Systèmes newtoniens à un degré de liberté . . . . .	60
V.3.	Champs du plan . . . . .	61
V.4.	Systèmes newtoniens à deux degrés de liberté . . . . .	64
V.5.	Systèmes newtoniens à un nombre quelconque de degrés de liberté . . . . .	76
V.6.	Exercices . . . . .	77

**VI – Champs de vecteurs**

VI.1.	Introduction et notations . . . . .	81
VI.2.	Le produit intérieur d'une forme différentielle par un champ de vecteurs . . . . .	82
VI.3.	Applications du produit intérieur : la divergence et le rotationnel . . . . .	83
VI.4.	Nouvelle interprétation de la notion de forme différentielle . . . . .	84
VI.5.	La dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs . . . . .	85
VI.6.	Flot local d'un champ de vecteurs et théorème fondamental de la dérivée de Lie . . . . .	85
VI.7.	Crochet de deux champs de vecteurs . . . . .	86
VI.8.	Hypersurfaces dans $\mathbb{R}^n$ et champs de vecteurs tangents à des hypersurfaces . . . . .	87
VI.9.	Le lemme de Poincaré . . . . .	89
VI.10.	Exercices . . . . .	90

**VII – Systèmes hamiltoniens et géométrie symplectique**

VII.1. Formulation des équations de Hamilton, forme symplectique . . .	93
VII.2. Exemples de systèmes hamiltoniens . . . . .	94
1) Exemple du plan . . . . .	94
2) Le flot géodésique sur la sphère . . . . .	96
VII.3. Transformations symplectiques, fonction génératrice . . . . .	97
VII.4. L'équation de Hamilton–Jacobi . . . . .	99
VII.5. Crochets de Poisson . . . . .	100
VII.6. Le flot géodésique sur l'ellipsoïde . . . . .	100
VII.7. Exercices . . . . .	103

**VIII – Systèmes lagrangiens et calcul variationnel**

VIII.1. Calcul variationnel . . . . .	107
VIII.2. Quelques exemples . . . . .	108
VIII.3. Systèmes hamiltoniens associés aux équations de Lagrange . . .	109
VIII.4. Exercices . . . . .	110

**IX – Variétés différentiables**

IX.1. Définition des variétés à bord . . . . .	113
IX.2. Application différentiable d'une variété différentiable dans une autre . . . . .	114
IX.3. Champs de vecteurs et formes différentielles sur une variété dif- férentiable . . . . .	114
IX.4. Orientation d'une variété différentiable . . . . .	115
IX.5. Exemples de variétés différentiables : les sphères et les espaces projectifs . . . . .	116
IX.6. Partition de l'unité associée à un atlas d'une variété . . . . .	117
IX.7. Intégration des formes différentielles sur une variété . . . . .	118
IX.8. Exercices . . . . .	120

**X – Fibré sur une variété, le fibré tangent et le fibré cotangent**

X.1. Fibrés vectoriels topologiques et différentiables . . . . .	125
X.2. Le fibré tangent $TM$ et le fibré cotangent $T^*M$ . . . . .	126
X.3. Forme symplectique canonique sur $T^*M$ . Notion de variété riemannienne et définition du flot géodésique sur une variété riemannienne . . . . .	127

---

X.4.	Connexion linéaire, exemple de la connexion de Levi–Civita, transport parallèle . . . . .	127
X.5.	Notion de tenseur, exemples des tenseurs de courbure et du tenseur de Ricci . . . . .	131
X.6.	Exercices . . . . .	132
<b>Solutions des exercices</b>		
	Chapitre I . . . . .	135
	Chapitre II . . . . .	146
	Chapitre III . . . . .	163
	Chapitre IV . . . . .	169
	Chapitre V . . . . .	170
	Chapitre VI . . . . .	180
	Chapitre VII . . . . .	184
	Chapitre VIII . . . . .	191
	Chapitre IX . . . . .	197
	Chapitre X . . . . .	202
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	207
	<b>Notations</b> . . . . .	209
	<b>Index</b> . . . . .	211