Chapitre 1

Sujet

Exercice 1 d'après Amérique du Nord mai 2011

Partie A
Étude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1) Étudier les variations de la fonction g.

2) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3) En déduire que pour tout x de $[0;+\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B
Étude de la fonction principale

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On admet que f est strictement croissante sur $[0;1]$.

1) Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.

2) Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.

a) Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

b) Étudier la position relative de la droite $\mathscr{D}$ et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0;1]$.

3) Primitives et intégrales

a) Déterminer une primitive F de f sur $[0\,;1]$.

b) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C
Une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{pour tout entier naturel } n.$$

1) Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 d'après Antilles Guyane juin 2011

Sur le plan euclidien, que l'on assimile au plan complexe, on pose un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. *Un point, un vecteur, peuvent donc être représentés soit par leur affixe, soit par leurs coordonnées.*

On appelle I le point d'affixe i. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives $a = -3-\text{i}$, $b = -2+4\text{i}$, $c = 3-\text{i}$ et $h = -2$. On établira une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

On rappelle que l'aire d'un trapèze de bases b et B et de hauteur h est : $\mathscr{A} = h \times \dfrac{b+B}{2}$.

1) Montrer que I est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$ ainsi que $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}$. Que représente le point H dans le triangle ABC ?

3) On note G le centre de gravité du triangle ABC, c'est-à-dire le point dont l'affixe vérifie $g = \dfrac{a+b+c}{3}$. Calculer g et placer G sur la figure.

4) Montrer que G, H, I sont alignés et vérifient $GH = 2GI$.

La droite portant G, H, I est appelée droite d'Euler *du triangle ABC.*

5) Quelques calculs d'angles. On note A' le milieu de $[BC]$ et B' le milieu de $[AC]$. On note aussi U le pied de la hauteur issue de A, c'est-à-dire le point de $[BC]$ tel que $(HU) \perp (BC)$

a) Déterminer l'aire du triangle ACI.

b) Le quadrilatère $IA'UH$:

(i) Prouver que c'est un trapèze.

(ii) Prouver que $u = 2i$, où u désigne l'affixe de U.

(iii) Déterminer les longueurs $A'U$, $A'I$ et AU.

(iv) Déterminer l'aire de $IA'UH$.

Exercice 3 d'après Métropole juin 2011

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_3})$. *Les coordonnées des points et des vecteurs seront notées soit en ligne* $\overrightarrow{u}\,(a; b; c)$ *soit en colonne* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Partie A
Un théorème important

ROC

Théorème du toit : Soient deux droites D_1 et D_2 avec $D_1 /\!/ D_2$, et deux plans, P_1 contenant D_1 et P_2 contenant D_2. On suppose que P_1 et P_2 sont sécants le long d'une droite D_0. Démontrer que $D_1 /\!/ D_0 /\!/ D_2$.

I

Partie B
Problème autour d'un cube

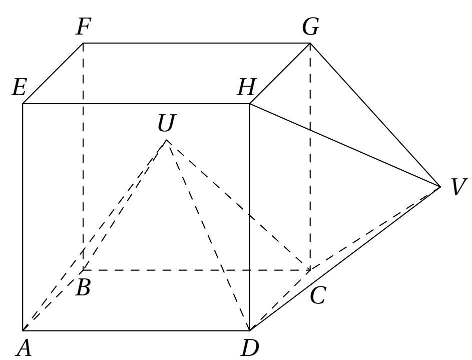

FIGURE 1 Figure du problème

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté c. On considère une pyramide régulière de base $ABCD$ et de sommet U, à l'intérieur du cube, vérifiant $AU = BU = CU = DU$. De même on considère une pyramide régulière de base $GCDH$ et de sommet V, à l'extérieur du cube, vérifiant $GV = CV = DV = HV$.

Soient $L = \text{mil}\,[DC]$, $M = \text{mil}\,[AB]$.

Soient I le centre du carré $ABCD$ et J le centre du carré $GCDH$.

Soit K tel que $\overrightarrow{MK} = \dfrac{3-\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. Prouver que la hauteur de la pyramide $ABCDU$ vérifie : $\overrightarrow{IU} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AE}$.
2. Décomposer les deux vecteurs $\overrightarrow{KU}$ et $\overrightarrow{UV}$ en fonction de trois vecteurs bien choisis.
3. K, U, V sont-ils alignés ?
4. Est-ce que $(UL) \mathbin{/\!/} (FC)$?
5. On considère les plans (EDU) et (CFU). Prouver que ces plans ne sont ni parallèles ni disjoints.
6. Soit Δ la droite commune à ces deux plans. Prouver que $\Delta \mathbin{/\!/} (ED)$.
7. En déduire une équation paramétrique de Δ dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$, puis les coordonnées du point d'intersection Z de Δ avec $(ABCD)$, le plan de base du cube dans ce même repère.

Exercice 4 d'après Métropole juin 2011

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, 2% de la population est contaminée par un virus.

Partie A
Arbre de probabilités

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ». $\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités. En déduire $p(V \cap T)$.
2. Deux calculs :
   a) Calculer la probabilité que le test soit positif.
   b) Calculer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B
Loi normale

On choisit successivement 300 personnes au hasard, on considère que les tirages sont indépendants, et que la probabilité pour une personne tirée d'être contaminée est 2%. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 300 personnes.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Calculer la probabilité p_2 qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 300.

2) Déterminer l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale suivie par X. Dans toute

la suite on considère une variable aléatoire Y suivant une loi normale $\mathcal{N}$ de paramètres $\mathcal{N}\left(\mu = 6; \sigma = 2,425\right)$.

3) Déterminer la probabilité $p_2' = p(Y > 2)$. On utilise la loi de Y comme approximation de la loi de X. Calculer l'erreur commise $\dfrac{p_2' - p_2}{p_2}$ à 0,1% près.

4) Calculer $p_3' = p(1,2473 < Y < 10,7527)$.

5) Calculer, avec deux décimales, la valeur de α tel que $p(6 - \alpha < Y < 6 + \alpha) = 0,99$.

6) Expliquer ce que peuvent représenter p_3' et α dans le contexte du problème.

Corrigé

Exercice 1

Partie A

1) On dérive : $g'(x) = e^x - 1$. D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

FIGURE 2 Variations de g

2) On lit sur le tableau de variations le signe de g. En effet, on y voit que le minimum de g est atteint en $x = 0$ et vaut $g(0) = 0$. On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$.

3) On vient de montrer que $\forall x \geqslant 0$, $e^x - x - 1 \geqslant 0$ ce qui équivaut à $e^x - x \geqslant 1$.

Il est immédiat d'en déduire que $\forall x \geqslant 0$, $\boxed{e^x - x > 0}$.

Partie B

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

1) Déjà on voit un dénominateur. Il ne faudrait pas qu'il s'annulle. Et justement, la partie A prouve qu'il n'y a aucun problème de ce côté-là.
Ensuite, on a vu dans la partie A que si $x \geqslant 0$, alors $e^x - x > 0$.

Et l'on sait d'autre part que si $x \geqslant 0$, $e^x - 1 \geqslant 0$.
On en déduit que si $x \geqslant 0$, le quotient de ces deux quantités est positif, soit :

$$\text{si } \ x \geqslant 0,\ \frac{e^x-1}{e^x-x} \geqslant 0$$

D'autre part, dans $[0,1]$ on peut écrire que :

$$x \leqslant 1 \Longrightarrow -x \geqslant -1 \Longrightarrow e^x - x \geqslant e^x - 1 \Longrightarrow 1 \geqslant f(x),$$

la dernière implication étant obtenue en divisant des deux côtés par $e^x - x > 0$.
Par conséquent, on a montré que dans $[0\,;1]$, $f(x) \in [0;1]$.

≀

2≀ Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.

a≀ C'est une mise au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
f(x) - x &= \frac{e^x-1}{e^x-x} - x \\
&= \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} \\
&= \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}. \\
\text{Or,}(1-x)g(x) &= (1-x)\left(e^x - x - 1\right) \\
&= e^x - xe^x \cancel{-x} + x^2 - 1 \cancel{+x}.
\end{aligned}$$

On a bien montré que les deux expressions $f(x) - x$ et $\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$ sont égales.

b≀ On étudie le signe de la différence $f(x) - x$. Cette différence est le produit de trois facteurs, qui sont $(1-x)$, toujours positif dans $[0,1]$, puis $g(x)$, toujours positif aussi, et enfin $\dfrac{1}{e^x - x}$ qui reste toujours strictement positif. Par conséquent :

$$\text{dans } [0;1]\,,\ \boxed{f(x) - x \geqslant 0}$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de $\mathscr{D}$ dans $[0,1]$.
On remarque aussi que les réels x qui annulent $f(x) - x$ sont :

- ⇝ les x qui annulent $(1-x)$ s'annule, donc $x = 1$;
- ⇝ les x qui annulent $g(x)$ s'annule, donc $x = 0$;

cela a pour conséquence que $\mathscr{C}$ coupe $\mathscr{D}$ en 0 et en 1.

≀

3≀ Intégrales

a≀ $f(x)$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x - x$ à valeurs strictement positives, donc $x \mapsto F(x) = \ln(e^x - x)$ est une primitive de f sur $[0\,;1]$.

b) Il s'agit de déterminer :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(f(x)-x\right)\mathrm{d}x &= \left[\ln\left(e^x-x\right)-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\\ &= \ln(e-1)-\frac{1}{2}-\ln(1)+\frac{0}{2}\\ &= \boxed{ln(e-1)-\tfrac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Le fait que $f(x)-x \geqslant 0$ dans l'intervalle considéré valide l'interprétation de l'intégrale comme une aire.

Partie C

1) Cette suite est définie pour tout $x \in \mathbb{N}$ car f ne possède pas de valeur interdite.
On peut visualiser sur ce graphique les premiers termes de la suite (u_n) :

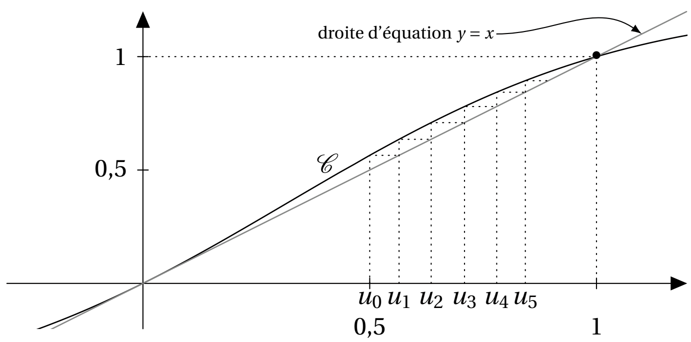

FIGURE 3 Premiers termes de (u_n)

2) Déjà, on démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$:

- ⇝ c'est vrai en $n = 0$ (premier pas) ;
- ⇝ on sait que si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;1]$ (question B)1)), on en déduit que si $u_n \in [0;1]$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$ (hérédité) ;
- ⇝ donc c'est vrai pour tout $n \geqslant 0$ (conclusion).

Ensuite, $f(x)-x \geqslant 0$ dans $[0;1]$, et tous les u_n sont dans $[0;1]$, donc $f(u_n)-u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$.
Vu que $u_{n+1} = f(u_n)$, on déduit de cela que, toujours pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$: on vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante.
À partir de là, la dernière inégalité est triviale : (u_n) est croissante et $u_0 = \frac{1}{2}$ donc pour tout n, $u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

3) (u_n) est croissante majorée (par 1) donc converge. On applique le théorème « si (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et si $u_n \to \ell$, alors $f(\ell) = \ell$ ». Ici on trouve donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$ qui sont les seuls réels de $[0,1]$ vérifiant $f(x) = x$ (question A)2)b)). Le cas $\ell = 0$ est à éliminer vu la question précédente. Conclusion :

$$\boxed{\lim(u_n) = 1.}$$

Exercice 2

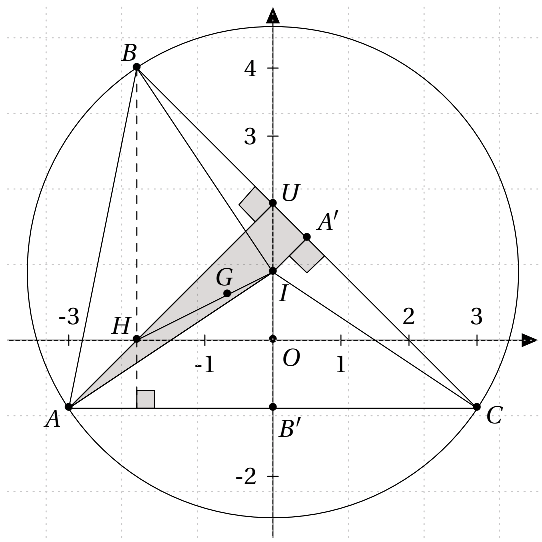

FIGURE 4 La figure de l'exercice

1) Il suffit de démontrer que $IA = IB = IC$. On calcule :

- $\rightsquigarrow$ $IA = |i - a| = |i + 3 + i| = |3 + 2i| = \sqrt{13}$.
- $\rightsquigarrow$ $IB = |i - b| = |i + 2 - 4i| = |2 - 3i| = \sqrt{13}$.
- $\rightsquigarrow$ $IC = |i - 3 + i| = |2i - 3| = \sqrt{13}$.

I est donc le cercle du cercle qui passe par A, B, C (cercle*circonscrit* à ABC), et le rayon de ce cercle est $\sqrt{13}$.

2) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 - 5 = 0$. De même, $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 0 - 4 \times 0 = 0$.

(AH) et (BH) sont donc deux hauteurs de ABC, donc H est l'orthocentre de ABC. (On pourrait d'ailleurs en déduire que $(CH) \perp (AB)$).

3) $g = \dfrac{a + b + c}{3} = \dfrac{-3 - i - 2 + 4i + 3 - i}{3} = \dfrac{-2 + 2i}{3}$.

4) On a $g = \dfrac{-2 + 2i}{3}$, $h = -2$ et $z_I = i$. On en déduit que :

- $\rightsquigarrow$ $z_{\overrightarrow{GH}} = -2 - \dfrac{-2 + 2i}{3} = \dfrac{-4 - 2i}{3}$;
- $\rightsquigarrow$ $z_{\overrightarrow{GI}} = i - \dfrac{-2 + 2i}{3} = \dfrac{2 + i}{3}$;