

Table des matières

1	Les équations de Navier-Stokes	1
1.1	Cinématique	1
1.2	Etude des déformations	4
1.3	Les équations de conservations	8
1.4	Le tenseur des contraintes	10
1.5	Les équations de la dynamique	13
1.6	Les équations de Navier-Stokes	14
1.7	Modèles et problèmes en mécanique des fluides	18
2	Rappels de topologie	21
2.1	Topologie et espaces métriques	21
2.2	Les fonctions continues	27
3	Analyse fonctionnelle de base	31
3.1	Espace de Banach et applications linéaires	31
3.2	Réflexivité	34
3.3	Convergences faibles et compacités faibles	35
3.4	Espace de Hilbert	38
3.5	Base hilbertienne	42
4	Intégration	45
4.1	Rappels sur l'intégration réelle	45
4.2	L'intégrale vectorielle de Bochner	49
5	Éléments sur les distributions	57
5.1	Les distributions réelles	57
5.2	Les distributions vectorielles	62
6	Espaces de Sobolev	67
6.1	Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$	67
6.2	Les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1,p'}(\Omega)$	72
6.3	Espaces de Sobolev d'ordre supérieur*	74

7	Les espaces pour la mécanique des fluides	75
7.1	Les espaces de fonctions spatiales	75
7.2	Les espaces de fonctions spatiales et évolutives	80
7.3	Point sur les identifications	82
8	Le problème de Stokes stationnaire	87
8.1	Formulation faible pour (S)	87
8.2	Commentaires sur le problème de résoudre (S)	89
8.3	Résolution de (S_F)	90
8.4	Une base spéciale pour \mathbb{H}	90
8.5	Solutions régulières*	94
9	Le problème de Stokes évolutif	95
9.1	Formulation faible pour (SE)	95
9.2	Analyse de (SE_F) lorsque $f \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$	98
9.2.1	Solutions approchées pour (SE_F)	98
9.2.2	Existence et unicité	100
9.3	Un résultat de régularité de la solution*	103
9.4	Analyse de (SE_F) lorsque $f \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$	105
9.5	Problèmes d'EDP paraboliques linéaires*	107
10	Compléments en analyse fonctionnelle	109
10.1	Le théorème du point fixe de Schauder	109
10.2	Problèmes d'EDO non linéaires	114
10.3	Espaces de Sobolev vectoriels	120
11	Problème de Navier-Stokes stationnaire	127
11.1	Formulation faible pour (NS)	128
11.2	Existence de solution pour (NS_F)	129
12	Le problème de Navier-Stokes	133
12.1	Formulation faible pour (P)	134
12.2	Existence d'une solution faible	135
12.2.1	Construction d'une suite approximante	135
12.2.2	Estimations uniformes	140
12.2.3	Passage à la limite	143
12.3	La question de l'unicité	146
12.3.1	Unicité en dimension $n = 2$	146
12.3.2	La question ouverte de l'unicité lorsque $n = 3$	150
12.4	Résultats partiels sur l'unicité lorsque $n = 3$	152
12.5	Pour aller plus loin	153