Chapitre 1

Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes forment un modèle mathématique qui décrit l'écoulement d'un fluide. Ce modèle est bien accepté et utilisé par les ingénieurs et les physiciens.
Dans ce chapitre nous montrons comment les équations de Navier-Stokes, sont dérivées à partir des lois de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement. Préalablement nous introduisons des notions utiles de cinématique.

Dans ce chapitre la rigueur mathématique est mise au second plan.
Concernant les notations, il est à retenir que nous utilisons la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés [1]. Les grandeurs vectorielles sont suivant les circonstances, annotées ou non avec une flèche.

Le lecteur souhaitant obtenir un développement plus approfondi du matériel présenté ici, peut consulter [2] chapitres I,II,III,VIII et IX ainsi que [3].

La première section traite de cinématique : il s'agit uniquement de décrire le mouvement d'un fluide, sans considérer les lois qui le régissent. Deux approches sont présentées : la description eulérienne et la description lagrangienne.

1.1 Cinématique

On considère un ensemble de particules, qui, à l'instant $t = 0$ occupe un espace $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$. Chaque particule est repérée par sa position $X \in \Omega_0$.
Les particules sont en mouvement. A l'instant t, le domaine Ω_0 s'est déplacé en $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. Au cours du temps, chaque particule peut être repérée par :

(i) La position $X \in \Omega_0$ qu'elle avait initialement (**configuration de Lagrange**)
(ii) La position $x \in \Omega_t$ qu'elle occupe à l'instant t (**configuation d'Euler**)

1. Par exemple $v_j \frac{\partial F}{\partial x_j}$ signifie : $\sum_j v_j \frac{\partial F}{\partial x_j}$.

L'utilisation de l'une ou de l'autre configuration donne lieu à deux descriptions distinctes du mouvement :

Description lagrangienne

On se réfère à chacune des particules que l'on suit dans son mouvement. Pour cela, on utilise les variables lagrangiennes X_1, X_2, X_3 et t. La position des particules au temps t est donnée par la fonction f :

$$x = f(X, t). \tag{1.1}$$

Pour un temps t donné, $f(., t)$ envoie Ω_0 sur Ω_t. Nous supposerons que cette application est bijective [2], et que la fonction $(X, t) \mapsto f(X, t)$ est continûment dérivable [3].

Description eulérienne

On se place en un point $M \in \mathbb{R}^3$ fixé et on se réfère aux particules qui passent en ce point [4]. Les variables utilisées sont appelées variables d'Euler. Il s'agit de x_1, x_2, x_3 et t. La fonction qui permet de retrouver les particules observées est notée g :

$$X = g(x, t). \tag{1.2}$$

Pour un temps t donné, $g(., t)$ envoie Ω_t sur Ω_0. Cette application est bijective et nous supposerons que la fonction $(x, t) \mapsto g(x, t)$ est continûment dérivable.

Bien qu'au final nous utiliserons une description eulérienne du mouvement, certaines quantités s'expriment naturellement en coordonnées lagrangiennes. Il est donc important de savoir passer d'une configuration à l'autre.

Lien entre les deux descriptions

Une propriété physique P associée aux particules, peut être représentée par $\tilde{P}(X, t)$ ou $P(x, t)$. Dans le premier cas il s'agit de la description lagrangienne, $\tilde{P}(X, t)$ définit la valeur de la propriété P pour la particule X et à l'instant t. Dans le second cas, $P(x, t)$ définit la valeur de la propriété P au point $x \in \mathbb{R}^3$ et à l'instant t. On a les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(X, t) &= P(f(X, t), t) \\ P(x, t) &= \tilde{P}(g(x, t), t). \end{aligned}$$

2. Ce qui revient à dire qu'il n'y a pas de perte de matière au cours du mouvement.
3. C'est-à-dire que le mouvement est régulier et qu'en particulier il ne se produit pas de choc ou de fracture.
4. A deux instants différents, la particule qui passe est a priori différente.

Vitesse et accélération

L'expression lagrangienne de la vitesse est donnée par

$$\tilde{v}(X,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X,t).$$

L'expression eulérienne s'obtient alors en utilisant (1.2). On a

$$v(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(g(x,t),t).$$

Pour l'accélération, en variables lagrangiennes, on a

$$\tilde{\gamma}(X,t) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(X,t).$$

En utilisant (1.2) on obtient aussi

$$\tilde{\gamma}(x,t) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(g(x,t),t).$$

Cette dernière expression est mixte puisqu'elle utilise les variables d'Euler ainsi que la vitesse lagrangienne.

Dérivée particulaire

La dérivée particulaire d'une grandeur P est le taux de variation temporelle de cette grandeur en suivant une particule à laquelle elle est attachée. On note $\frac{dP}{dt}$ avec le sens suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t}(X,t) \quad \text{en variable de Lagrange} \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial t}(x,t) + v_j(x,t).\frac{\partial P}{\partial x_j}(x,t) \quad \text{en variable d'Euler.} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dans la relation (1.3), nous avons utilisé la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés. Dans la suite nous adopterons cette convention sans plus la rappeler. On note par ∇v le tenseur [5] des gradients de vitesse, i.e.

$$\nabla v = (\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{ij}.$$

En utilisant (1.3) nous obtenons l'expression eulérienne de l'accélération :

$$\gamma(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{\nabla v \circ v}_{()_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.v_j} {}^{6}. \tag{1.4}$$

Nous allons maintenant nous concentrer sur un aspect particulier du mouvement du fluide : ses déformations [7].

5. De rang 2, voir [1] Annexe A pour la définition générale d'un tenseur.
6. Une autre écriture équivalente de ce terme est : $(v \cdot \nabla)v$.
7. C'est-à-dire le mouvement relatif entre les particules.

1.2 Etude des déformations

On fixe un temps t et on étudie les déformations que Ω_0 a subies. Soit $\overrightarrow{dM_0}$ un vecteur infinitésimal qui a pour origine le point $M_0 \in \Omega_0$, de coordonnées X. Au temps t, $\overrightarrow{dM_0}$ a été transformé en $\overrightarrow{dM}$ comme représenté dans la figure 1.1 ci-dessous :

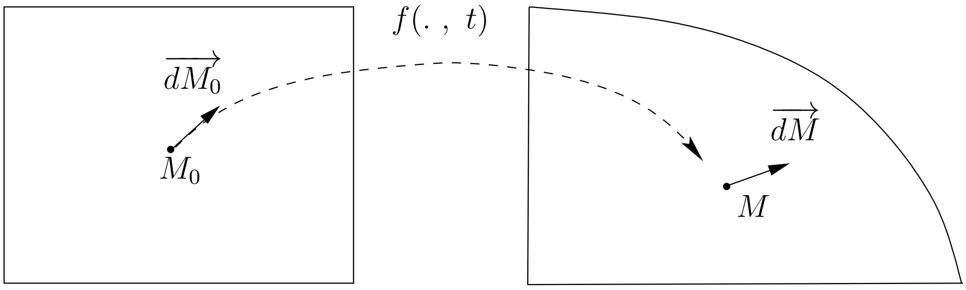

FIGURE 1.1 – Représentation des déformations

On définit le tenseur F[8], gradient de la déformation au point M_0 à l'instant t, en posant

$$\overrightarrow{dM} = \tilde{F}\overrightarrow{dM_0}, \quad \tilde{F}_{ij}(X,t) = \frac{\partial f_i(X,t)}{\partial X_j}.$$

Avec les hypothèses faites sur la transformation f et sur sa réciproque g nous vérifions que :

$$\det \tilde{F}(X,t) > 0 \quad \forall X, t. \tag{1.5}$$

En effet pour tout t et tout $x \in \Omega_t$, l'identité $x = f(g(x,t),t)$ est vérifiée. Nous pouvons dériver cette relation puisque f et g sont dérivables. On obtient :

$$F(x,t).G(x,t) = Id, \quad \text{où } G(x,t) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x,t)\right)_{ij}.$$

En conséquence $\det F . \det G \equiv 1$, ce qui implique que $\det F$ ne s'annule jamais[9]. On remarque ensuite que $f(.,0) = g(.,0) = Id$ car $\Omega_0 = \Omega_{t=0}$. Il s'en suit que $\det \tilde{F}(X,0) \equiv 1$. Mais par ailleurs puisque nous avons supposé que $(X,t) \mapsto f(X,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $(X,t) \mapsto \det \tilde{F}(X,t)$ est continue. Ainsi le signe de $\det \tilde{F}$ reste toujours strictement positif[10], ce qui prouve (1.5).

8. $\tilde{F}$ en coordonnées lagrangiennes.
9. Il en est bien sûr de même pour $\det \tilde{F}$ car $\det \tilde{F}(X,t) = \det F(f(X,t),t)$.
10. De même : $\det F(x,t) > 0, \quad \forall x, t$.

On introduit ensuite la notion de déformation à l'instant t, par rapport à la configuration Ω_0, et au voisinage de M_0, par la variation

$$\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0}.\overrightarrow{\delta M_0},$$

pour tous les couples infinitésimaux $\overrightarrow{dM_0}, \overrightarrow{\delta M_0}$, au point M_0.
Etant donné que $\overrightarrow{dM} = \tilde{F}\overrightarrow{dM_0}$ et $\overrightarrow{\delta M} = \tilde{F}\overrightarrow{\delta M_0}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0}.\overrightarrow{\delta M_0} &= \tilde{F_{ij}} dX_j \tilde{F_{ik}} \delta X_k - dX_j \delta X_j \\ &= \tilde{C}_{jk} dX_j \delta X_k - \delta_{jk} dX_j \delta X_k.\end{aligned}$$

Nous avons fait apparaître le tenseur $C := F^t F$ appelé tenseur des dilatations.
On définit le tenseur des déformations X par :

$$X = \frac{1}{2}\left(C - Id\right). \tag{1.6}$$

Nous obtenons finalement la relation

$$\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0}.\overrightarrow{\delta M_0} = 2\tilde{X}_{ij} dX_i \delta X_j, \tag{1.7}$$

d'où la propriété suivante :

| Il n'y a pas de déformation au point M et à l'instant t, par rapport à la configuration Ω_0 $\iff$ $X(M,t) = 0$.

Le tenseur des vitesses de déformations

On fixe un temps t et on étudie la vitesse à laquelle les déformations se produisent en $M \in \Omega_t$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0}.\overrightarrow{\delta M_0}\right) &= \frac{d}{dt}\big(\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M}\big) \quad \forall\, \overrightarrow{dM_0}, \overrightarrow{\delta M_0} \\ &= \frac{d}{dt}(\overrightarrow{dM}).\overrightarrow{\delta M} + \overrightarrow{dM}.\frac{d}{dt}(\overrightarrow{\delta M}) \\ &= \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X,t)\big) dX_j \delta x_i + dx_j \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(X,t)\big).\delta X_i \\ &= \frac{\partial}{\partial X_j}\tilde{v_i}(X,t) dX_j \delta x_i + \frac{\partial}{\partial X_i}\tilde{v_j}(X,t) dx_j \delta X_i.\end{aligned}$$

Remarquons ensuite que, pour $x = f(X,t)$, on a $\tilde{v_i}(X,t) = v_i(x,t)$, d'où

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\tilde{v_i}(X,t) dX_j = \frac{\partial}{\partial x_k} v_i(x,t) \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial X_j} dX_j}_{=dx_k},$$

et, au final :

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0}.\overrightarrow{\delta M_0}\right) = \big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big) dx_j \delta x_i. \tag{1.8}$$

On définit alors le tenseur des vitesses de déformations, noté D par :

$$D_{ij}(v) := \frac{1}{2}\big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big) = \frac{1}{2}\big(\nabla v + (\nabla v)^t\big)_{ij}. \tag{1.9}$$

Il est attaché à la description eulérienne. C'est un tenseur symétrique qui s'exprime linéairement par rapport aux composantes du champ des vitesses en description eulérienne. On a la propriété suivante :

> La région $\omega(t)$ ne subit pas de déformation entre les instants t_1 et t_2
> $\Leftrightarrow D(v(x,t)) = 0, \quad \forall x \in \omega(t),\ t \in [t_1, t_2]$.

Cette propriété se vérifie aisément. En effet, s'il n'y a aucune déformation, c'est-à-dire si $\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M}$ reste constant, alors en utilisant (1.8) on obtient

$$D(v(x,t))dx_i\delta x_j = 0, \quad \forall\ dx_i, \delta x_j.$$

On conclut alors que $D(v(x,t)) \equiv 0$.
De l'autre coté, si $D(v(x,t)) \equiv 0$, alors l'expression (1.8) implique que $\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M}$ reste constant. Il n'y a donc pas de déformation.

Dérivée particulaire d'une intégrale

On considère ici une grandeur physique K qui est attachée à un ensemble (en mouvement) $\omega(t)$ de particules. La grandeur K est définie à l'aide d'une fonction k donnée, par une intégrale sur $\omega(t)$:

$$K(t) = \int_{\omega(t)} k(x,t)dx.$$

On remarque que deux causes sont susceptibles de faire évoluer K : une déformation du domaine $\omega(t)$ ou une variation de la fonction k.
Supposons pour fixer les idées que k et v sont continues dans $\Omega \times (0,T)$, et admettent des dérivées partielles bornées. On obtient alors [11] :

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega(t)} \big(\frac{\partial k}{\partial t}(x,t) + \text{div } (k(x,t)v(x,t))\big)dx. \tag{1.10}$$

La preuve de (1.10) nécessite de passer par quelques étapes calculatoires que nous présentons ci-dessous.
En premier lieu en effectuant le changement de variable $x = f(X,t)$, nous reformulons $K(t)$ en une intégrale sur le domaine fixe $\omega(0) = g(\omega(t),t) \subset \Omega_0$:

$$K(t) = \int_{\omega(0)} \tilde{k}(X,t)\tilde{J}(X,t)dX, \quad \text{où } \tilde{J} := |\det \tilde{F}| \overset{\text{par (1.5)}}{=} \det \tilde{F}.$$

11. Ce résultat est parfois appelé théorème du transport ou encore théorème de Reynolds.

En appliquant alors la formule de dérivation sous le signe intégral, nous obtenons :

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega(0)} \big(\underbrace{\frac{d\tilde{k}}{dt}(X,t)}_{=\partial_t \tilde{k}(X,t)} \det \tilde{F}(X,t) + \tilde{k}(X,t) \underbrace{\frac{d}{dt} \det \tilde{F}(X,t)}_{=\partial_t \det \tilde{F}(X,t)} \big) dX.$$

Ainsi (1.10) est vérifiée si l'on montre que :

$$\partial_t \det \tilde{F}(X,t) = \det \tilde{F}(X,t).\ \mathrm{div}\ v(f(X,t),t). \tag{1.11}$$

Remarquons [12] tout d'abord que

$$\partial_t \det \tilde{F}(X,t) = \det(\partial_t \tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3) + \det(\tilde{F}_1, \partial_t \tilde{F}_2, \tilde{F}_3) + \det(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \partial_t \tilde{F}_3),$$

où $\tilde{F}_i = \tilde{F}_i(X,t)$ est la ième colonne de la matrice [13] $\tilde{F}(X,t)$. Mais par ailleurs, en utilisant un résultat élémentaire sur le calcul de déterminant [14] et en remarquant que $\partial_t \tilde{F}_i = \partial_t \tilde{F} \circ \tilde{F}^{-1}(\tilde{F}_i)$, il vient :

$$\partial_t \det \tilde{F} = \det \tilde{F}\ \mathrm{tr}(\partial_t \tilde{F} \circ \tilde{F}^{-1}).$$

Il ne reste alors plus qu'à vérifier [15] que

$$\partial_t \tilde{F}(X,t) \circ \tilde{F}(X,t)^{-1} = \nabla v(f(X,t),t).$$

Posons $M_{ij} = (\partial_t \tilde{F}(X,t))_{ij}$ et $A_{ij} = (\partial_t \tilde{F} \circ \tilde{F}^{-1})_{ij}$. On a

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \partial_t \partial_{X_j} f_i(X,t) = \partial_{X_j} \partial_t f_i(X,t) = \partial_{X_j} \tilde{v}_i(X,t) = \partial_{X_j} v_i(f(X,t),t)) \\
&\overset{x=f(X,t)}{=} \partial_{x_l} v_i(x,t).\partial_{X_j} f_l(X,t) = (\nabla v(x,t))_{il} \tilde{F}(X,t)_{lj}, \\
\text{d'où : } A_{ij} &= M_{ik}(\tilde{F}^{-1})_{kj} = \sum_k (\sum_l (\nabla v(x,t))_{il} \tilde{F}(X,t)_{lj})(\tilde{F}^{-1})_{kj} \\
&= \sum_l \big((\nabla v(x,t))_{il} \underbrace{\sum_k \tilde{F}(X,t)_{lj} (\tilde{F}^{-1})_{kj}}_{=\delta_{lj}} \big) = (\nabla v(x,t))_{ij}.
\end{aligned}$$

Ainsi (1.11) est bien vérifiée, ce qui termine la preuve de la formule (1.10).

A ce stade nous avons introduit la plupart des grandeurs et des outils utiles pour décrire le mouvement. Nous nous intéressons à présent aux lois physiques qui le régissent : la conservation de la masse et du torseur des quantités de mouvement.

12. En effet l'application qui à trois vecteurs M_1, M_2 et M_3 de $\mathbb{R}^3$ associe $\det(M_1, M_2, M_3) \in \mathbb{R}$ est trilinéaire. En conséquence, si on suppose que $M_i = M_i(t)$ et que l'on note par $M = M(t)$ la matrice (M_1, M_2, M_3), on a : $\partial_t \det M = \det(\partial_t M_1, M_2, M_3) + \det(M_1, \partial_t M_2, M_3) + \det(M_1, M_2, \partial_t M_3)$.

13. Peu importe la base de $\mathbb{R}^3$ choisie car le déterminant (et aussi la trace) d'une matrice est indépendant d'un tel choix.

14. Si M est un endomorphisme de $\mathbb{R}^N$ et $\{a_1, a_2, .., a_N\}$ est un ensemble de N vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(M) \det(a_1, .., a_N) &= \det(M(a_1), a_2, .., a_N) + \det(a_1, M(a_2), a_3, .., a_N) \\
&\quad + .. + \det(a_1, .., a_{N-1}, M(a_N)).
\end{aligned}$$

15. Car de manière évidente $\mathrm{tr}(\nabla v) = \mathrm{div}\ v$.

1.3 Les équations de conservations

Conservation de la masse et conséquences

Soit $\omega(t) \subset \Omega_t$ un ensemble quelconque de particules. Sa masse est donnée par la formule

$$m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(x,t)dx,$$

où $\rho(x,t)$ désigne la densité au point x et à l'instant t.
La loi de conservation de la masse, se traduit alors par

$$\frac{d}{dt}m(\omega(t)) = 0, \quad \forall\ \omega(t) \subset \Omega_t.$$

En utilisant (1.10) cette équation devient

$$\int_{\omega(t)} \big(\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \text{div }(\rho v)\big)dx = 0, \quad \forall\ \omega(t) \subset \Omega_t,$$

qui est encore équivalente [16] à l'équation suivante, appelée équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \text{div }(\rho v) = 0, \quad \forall t, \forall x \in \Omega_t. \tag{1.12}$$

Considérons à présent une quantité physique Q attachée à l'ensemble $\omega(t)$, de la forme

$$Q(t) := \int_{\omega(t)} \rho B(x,t)dx.$$

La dérivée particulaire de Q prend l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \int_{\omega(t)} \big(\frac{\partial}{\partial t}(\rho B) + \text{div }(\rho B v)\big)dx \\ &= \int_{\omega(t)} \Big(B\,\underbrace{\big(\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \text{div }(\rho v)\big)}_{=0 \text{ par } (1.12)} + \underbrace{\rho\frac{\partial B}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j}B}_{=\frac{dB}{dt} \text{ par } (1.3)}\Big)dx.\end{aligned}$$

Nous voyons donc que l'on a la formule :

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} \rho B(x,t)dx = \int_{\omega(t)} \rho\frac{dB}{dt}dx. \tag{1.13}$$

Avant d'énoncer la loi de conservation de la quantité de mouvement, il nous faut modéliser les forces internes, c'est-à-dire les actions de contacts mutuelles entre les particules [17] de fluide.

16. En utilisant une propriété élémentaire de l'intégrale : si φ est continue sur $\overline{\Omega}$ alors $\int_{\Omega'} \varphi(x)dx = 0 \quad \forall\ \Omega' \subset \Omega \Rightarrow \varphi \equiv 0$.

17. On s'intéresse en fait à une description macroscopique d'un phénomène dont l'origine est microscopique, si bien que nous étudierons les contacts entre des parties et non entre des particules.