

Table des matières

Présentation et mode d'emploi	1
Module 1 Outils fondamentaux	5
Chapitre 1 : Trigonométrie	7
1.1 Cercle trigonométrique	7
1.2 Symétries dans le cercle trigonométrique	9
1.3 Formules d'addition	10
1.4 Formules de duplication	11
1.5 Transformations de produits en sommes	12
1.6 Transformations de sommes en produits	12
Chapitre 2 : Compléments de trigonométrie	16
2.1 Inversion des fonctions trigonométriques	16
2.2 Résolution d'équations trigonométriques	18
2.3 Transformation d'expressions trigonométriques	19
2.4 Coordonnées polaires du plan	21
2.5 Fonctions sinusoïdales	22
Chapitre 3 : Nombres complexes et trigonométrie	26
3.1 Forme algébrique des nombres complexes	26
3.2 Plan complexe et forme trigonométrique	27
3.3 Exponentielle complexe	29
3.4 Forme exponentielle des nombres complexes	30
3.5 Formules d'Euler et linéarisation	31
3.6 Sommes trigonométriques et complexes	32
3.7 Sommes de fonctions sinusoïdales	34
Chapitre 4 : Déterminants	38
4.1 Qu'est-ce qu'un déterminant ?	38
4.2 Calcul pratique des déterminants	39

4.3	Règle de Sarrus	41
4.4	Opérations sur les déterminants	42
4.5	Interversion de colonnes dans un déterminant	43
4.6	Formules de Cramer	45
4.6.1	Systèmes de deux équations à deux inconnues	45
4.6.2	Systèmes de trois équations à trois inconnues	46
Chapitre 5 : Produit scalaire		50
5.1	Projection orthogonale sur un axe orienté	50
5.2	Produit scalaire et projection orthogonale	52
5.3	Propriétés algébriques du produit scalaire	53
5.4	Bases orthonormées du plan	55
5.4.1	Définition et exemples	55
5.4.2	Expression analytique du produit scalaire	56
5.4.3	Changement de base orthonormée	57
5.5	Bases orthonormées de l'espace	58
5.5.1	Définition	58
5.5.2	Coordonnées cylindriques et sphériques	58
5.5.3	Propriétés des bases orthonormées	60
Chapitre 6 : Notions de géométrie plane		64
6.1	Le triangle	64
6.2	Le cercle	67
6.2.1	Circonférence et surface	67
6.2.2	Théorème de l'angle inscrit	68
6.3	Constructions à la règle et au compas	69
Chapitre 7 : Géométrie analytique du plan		75
7.1	Orthogonalité, distance, parallélisme	76
7.1.1	Orthogonalité et distance	76
7.1.2	Parallélisme	76
7.2	Equations cartésiennes	77
7.2.1	Définition	77
7.2.2	Equation normale d'une droite	78
7.2.3	Equation fonctionnelle d'une droite	79
7.2.4	Equation cartésienne d'un cercle	80
7.3	Equations polaires	81
7.4	Notions sur la parabole	82
Chapitre 8 : Produit vectoriel et produit mixte		88
8.1	Produit vectoriel	88
8.2	Bases orthonormées directes	90

8.2.1	Dans le plan	90
8.2.2	Dans l'espace	90
8.2.3	Expression analytique du produit vectoriel	91
8.3	Produit mixte de trois vecteurs de l'espace	92
8.3.1	Définition et premières propriétés	92
8.3.2	Expression analytique du produit mixte	93
Chapitre 9 : Géométrie analytique de l'espace		97
9.1	Equation cartésienne d'une sphère	97
9.2	Equation cartésienne d'un plan	98
9.3	Distance d'un point à un plan	100
9.4	Droites de l'espace	101
Chapitre 10 : Introduction au calcul différentiel		105
10.1	Dérivée d'une fonction en un point	105
10.2	Opérations sur les fonctions dérivables	108
10.3	Notation de Leibniz	110
10.4	Dérivée d'une fonction composée	111
10.5	Notions de cinématique	112
10.5.1	Trajectoire, vitesse et accélération	112
10.5.2	Cas des coordonnées polaires	114
10.5.3	Mouvement rectiligne	116
10.5.4	Mouvement circulaire	116
Chapitre 11 : Compléments de calcul différentiel		122
11.1	Dérivées des exposants rationnels	122
11.1.1	La longue histoire des exposants	123
11.1.2	Dérivées des exposants fractionnaires	125
11.2	Dérivées des fonctions réciproques	126
11.3	Un exemple de calcul infinitésimal	127
11.4	Dérivée de l'exponentielle complexe	128
11.5	Dérivées partielles	129
11.5.1	Fonctions de plusieurs variables	129
11.5.2	Dérivées partielles	130
Chapitre 12 : Exponentielles et logarithmes		134
12.1	Fonctions exponentielles	134
12.1.1	Définition et propriété fondamentale	134
12.1.2	Dérivée des fonctions exponentielles	136
12.1.3	Limites et formes indéterminées	137
12.1.4	Fonction exponentielle complexe	138
12.2	Fonctions logarithmes	139

12.2.1	Définition et exemples	139
12.2.2	Propriété fondamentale	140
12.2.3	Le rôle central du logarithme népérien	141
12.3	Trigonométrie hyperbolique	142
12.3.1	Définition et formules d'addition	142
12.3.2	Dérivées et représentations graphiques	144
Module 2 Courbes et graphiques		149
Chapitre 13 : Représentations graphiques		151
13.1	Plan général d'étude d'une fonction	151
13.2	Ensemble de définition d'une fonction	152
13.3	Réduction de l'ensemble d'étude	153
13.3.1	Fonctions paires et impaires	153
13.3.2	Fonctions périodiques	154
13.4	Asymptotes	155
13.5	Branches paraboliques	157
13.6	Tangentes particulières	157
13.7	Points d'inflexion	159
Chapitre 14 : Courbes paramétrées		164
14.1	Notion de courbe paramétrée	164
14.2	Un exemple : la cardioïde	166
14.2.1	Réduction du domaine d'étude	166
14.2.2	Variations simultanées	166
14.2.3	Tangentes aux points remarquables	168
14.2.4	Tracé de la courbe	168
14.3	Cycloïdes	169
14.3.1	La cycloïde	169
14.3.2	Epicycloïdes	171
14.4	Base de Frénet et courbure	172
14.4.1	Abscisse curviligne	172
14.4.2	Base de Frénet	172
14.4.3	Vitesse et accélération dans la base de Frénet	173
14.4.4	Calcul pratique du rayon de courbure	174
Chapitre 15 : Ellipse et parabole		178
15.1	Ellipse	178
15.1.1	Définition de l'ellipse	178
15.1.2	Foyers et excentricité	179
15.1.3	Propriété bifocale et paramètre	180

15.2	Ellipse et parabole en coordonnées polaires	181
15.3	Sections coniques	183
Chapitre 16 : Nombres complexes et transformations		187
16.1	Variable complexe et transformations	187
16.2	Expressions analytiques et polaires	189
16.3	Image d'une courbe par une transformation	190
16.4	Inversion complexe	192
16.5	Similitudes	194
16.5.1	Dans le plan complexe	194
16.5.2	Triangles semblables	196
Module 3 Calcul différentiel et intégral		201
Chapitre 17 : Primitives		203
17.1	Primitives d'une fonction	203
17.2	Calculs élémentaires de primitives	206
17.3	Intégration par parties	207
17.4	Primitives de fonctions trigonométriques	208
17.5	Changement de variable	209
Chapitre 18 : Intégrales		212
18.1	Définition et interprétation géométrique	212
18.2	Propriétés élémentaires des intégrales	214
18.3	Intégration par parties	217
18.4	Changement de variable	218
18.5	Applications du calcul intégral	219
18.5.1	Volume de la sphère	219
18.5.2	Surface de la sphère	220
18.5.3	Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle	220
Chapitre 19 : Equations différentielles linéaires homogènes		226
19.1	Equations du premier ordre	226
19.2	Equation de l'oscillateur harmonique	228
19.3	Equation du second ordre (cas général)	229
19.4	Un exemple de système différentiel linéaire	231
19.5	Amortissement et oscillations libres	231
19.5.1	Equation du premier ordre	231
19.5.2	Equation du second ordre	232

Chapitre 20 : Equations différentielles avec second membre	237
20.1 Principe général de résolution	237
20.2 Second membre constant	238
20.3 Second membre sinusoïdal	239
20.3.1 Première méthode	239
20.3.2 Deuxième méthode	240
20.4 Principe de superposition	241
20.5 Solution permanente et solution transitoire	242
Chapitre 21 : Compléments sur les équations différentielles	245
21.1 Equations à variables séparables	245
21.2 Méthode de variation de la constante	247
21.3 Changement de fonction inconnue	248
21.4 Changement de variable	251
21.5 Le problème de Cauchy	252
Chapitre 22 : Développements limités	256
22.1 Exemple et définition	256
22.2 La formule de Taylor-Young	257
22.3 Développements limités et approximations	259
22.4 Opérations sur les développements limités	260
22.4.1 Substitutions élémentaires	260
22.4.2 Addition de développements limités	261
22.4.3 Multiplication de deux développements limités	261
22.4.4 Intégration des développements limités	262
22.4.5 Substitutions non élémentaires	263
22.5 Généralisations	264
22.5.1 Développement limité au voisinage de a	264
22.5.2 Développements asymptotiques	265
Chapitre 23 : Différentielles et champs de vecteurs	269
23.1 Différentielle d'une fonction	269
23.2 Variables liées	271
23.3 Expression intrinsèque de la différentielle	273
23.4 Champs de vecteurs	275
23.5 Circulation d'un champ de vecteurs	275
23.6 Différentielle exacte et potentiel scalaire	278
Chapitre 24 : Intégrales doubles	284
24.1 Notion d'intégrale double	284
24.2 Calcul en coordonnées cartésiennes	285
24.3 Calcul en coordonnées polaires	287

24.4	Intégrale double sur un pavé	290
Chapitre 25	Intégrales triples	293
25.1	Notion d'intégrale triple	293
25.2	Calcul en coordonnées cartésiennes	295
25.3	Calcul en coordonnées cylindriques	297
25.4	Calcul en coordonnées sphériques	299
Chapitre 26	Analyse vectorielle	303
26.1	Opérateurs de l'analyse vectorielle	303
26.2	Surfaces de l'espace	305
26.2.1	Représentation d'une surface	305
26.2.2	Vecteur normal à une surface	307
26.2.3	Lignes de champs et surfaces équipotentielles	308
26.2.4	Intégrales de surface	309
26.3	Flux d'un champ de vecteurs	310
26.4	Formules de Stokes et d'Ostrogradski	311
26.4.1	Expression intrinsèque de la divergence	311
26.4.2	Expression intrinsèque du rotationnel	313
26.4.3	Formules de Stokes et d'Ostrogradski	314
26.4.4	Champs à flux conservatif	315
26.5	Angle solide	316
Chapitre 27	Calcul barycentrique	320
27.1	Définition du barycentre	320
27.2	Propriétés du barycentre	322
27.3	Barycentres et géométrie	324
27.3.1	Alignements et droites concourantes	324
27.3.2	Lignes et surfaces de niveau	324
27.4	Centre d'inertie d'un solide	325
27.5	Théorèmes de Pappus-Guldin	328
Module 4	Mathématiques discrètes	335
Chapitre 28	Nombres entiers et arithmétique	337
28.1	Entiers naturels et récurrence	337
28.2	Entiers relatifs et division euclidienne	340
28.2.1	Multiples et diviseurs	340
28.2.2	Division euclidienne dans \mathbb{Z}	342
28.3	Théorème de Bézout et conséquences	344
28.4	Nombres premiers	347

Chapitre 29 : Analyse combinatoire	352
29.1 Coefficients binomiaux et triangle de Pascal	352
29.2 Formule du binôme de Newton	355
29.3 Formule de Leibniz	357
29.4 Arrangements, permutations, combinaisons	359
Chapitre 30 : Suites classiques	365
30.1 Suites arithmétiques	365
30.2 Suites géométriques	367
30.3 Récurrences linéaires du second ordre	370
30.4 Sommes de termes consécutifs	372
30.4.1 Formules sommatoires	372
30.4.2 Sommes télescopiques	374
30.4.3 Opérations sur les sommes discrètes	375
30.5 Sommes et produits d'égalités	376
Chapitre 31 : Suites convergentes	381
31.1 Qu'est-ce qu'une suite convergente?	381
31.1.1 Exemples de suites convergentes	381
31.1.2 Définition mathématique d'une suite convergente	384
31.1.3 Suites divergentes	385
31.2 Convergence d'une suite géométrique	387
31.3 Théorème des suites monotones	388
31.4 Théorème des suites adjacentes	391
31.5 Suites extraites	392
Chapitre 32 : Introduction à l'analyse numérique	397
32.1 Analyse numérique et algorithmes	397
32.2 Méthodes de dichotomie et de Lagrange	398
32.2.1 Méthode de dichotomie	398
32.2.2 Méthode de Lagrange (ou <i>regula falsi</i>)	400
32.3 Calcul numérique des intégrales	402
32.3.1 Méthode des rectangles	402
32.3.2 Méthode des trapèzes	404
32.3.3 Méthode de Simpson	404
32.4 Méthodes d'Euler et de Runge-Kutta	406
32.4.1 Méthode d'Euler	406
32.4.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2	407
32.5 Rapidité de convergence et approximation	408

Module 5 Algèbre	413
Chapitre 33 : Langage de la logique et des ensembles	415
33.1 Langage de la logique	415
33.1.1 Proposition logique	415
33.1.2 Conjonction, disjonction, négation	416
33.1.3 Implication	417
33.1.4 Equivalence	418
33.1.5 Raisonnements par contraposition et par l'absurde	418
33.1.6 Quantificateurs	419
33.2 Ensembles et algèbre de Boole	420
33.2.1 Notion d'ensemble	420
33.2.2 Inclusion	420
33.2.3 Intersection et réunion	421
33.2.4 Produit cartésien	422
33.3 Cardinal d'un ensemble fini	423
33.4 Application d'un ensemble dans un autre	424
33.4.1 Applications et fonctions	424
33.4.2 Composition des applications	425
33.4.3 Image d'un ensemble par une application	426
33.5 Injections, surjections et bijections	427
33.5.1 Injections	427
33.5.2 Surjections	428
33.5.3 Bijections	428
33.5.4 Bijection réciproque	429
Chapitre 34 : Equations et polynômes	433
34.1 Equations	433
34.1.1 Racines n -ièmes d'un nombre complexe	433
34.1.2 Racines carrées d'un nombre complexe	435
34.1.3 Equation du second degré dans \mathbb{C}	436
34.2 Polynômes	437
34.2.1 Division euclidienne des polynômes	437
34.2.2 Racines d'un polynôme et factorisation	438
34.2.3 Racines simples et racines multiples	440
34.2.4 Théorème de d'Alembert	441
34.2.5 Relations entre coefficients et racines	442
34.2.6 Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$	443

Chapitre 35 : Fractions rationnelles	448
35.1 Décomposition en éléments simples	448
35.2 Calcul de la partie entière	451
35.3 Cas des pôles réels	452
35.3.1 Pôles réels simples	452
35.3.2 Pôles réels doubles	453
35.4 Eléments simples de deuxième espèce	454
35.5 Primitives des fractions rationnelles	455
35.5.1 Un exemple élémentaire	455
35.5.2 Primitives des éléments simples de deuxième espèce	455
Chapitre 36 : Groupes et corps	459
36.1 Groupes	459
36.2 Sous-groupes	461
36.3 Permutations et groupe symétrique	463
36.3.1 Définition et exemples	463
36.3.2 Groupe symétrique	464
36.4 Corps	465
Module 6 Compléments d'analyse	469
Chapitre 37 : Limites et équivalents	471
37.1 Limites et formes indéterminées	471
37.2 Comparaison locale de deux fonctions	473
37.2.1 Équivalents et limites	474
37.2.2 Opérations sur les équivalents	476
37.2.3 Suites équivalentes	478
37.3 Deux techniques de calcul de limites	478
37.3.1 Changement de variable	478
37.3.2 Théorème d'encadrement	479
37.4 Définition mathématique d'une limite	480
Chapitre 38 : Continuité et dérivabilité	485
38.1 Partie entière et valeur absolue	485
38.1.1 Partie entière d'un nombre réel	485
38.1.2 Valeur absolue	486
38.2 Généralités sur les fonctions continues	487
38.2.1 Définition et exemples	487
38.2.2 Opérations sur les fonctions continues	488
38.2.3 Prolongement par continuité	489
38.3 Fonctions continues sur un intervalle	489

38.4	Généralités sur les fonctions dérivables	492
38.4.1	Dérivabilité à gauche et à droite	492
38.4.2	Fonctions de classe \mathcal{C}^n	492
38.5	Fonctions dérivables sur un intervalle	494
38.5.1	Dérivée en un extremum	494
38.5.2	Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	495
38.5.3	Inégalités des accroissements finis	496
Chapitre 39 : Compléments de calcul intégral		501
39.1	Majoration des intégrales	501
39.2	Intégrale fonction de sa borne du haut	503
39.3	Formule de Taylor avec reste intégral	505
39.4	Intégrales de Wallis	507
Chapitre 40 : Séries		512
40.1	Définition et exemples	512
40.2	Critère grossier de divergence	515
40.3	Séries à termes positifs	516
40.4	Absolute convergence	519
Chapitre 41 : Transformation de Laplace		525
41.1	Intégrales généralisées	525
41.2	Transformation de Laplace	526
41.2.1	Fonctions causales	526
41.2.2	Transformation de Laplace	527
41.2.3	Transformée de Laplace de la dérivée	529
41.2.4	Transformation de Laplace inverse	530
41.3	Application aux équations différentielles	531
41.4	Compléments	532
41.4.1	Théorème du retard	532
41.4.2	Théorème d'amortissement	533
41.4.3	Valeur finale et valeur initiale	534
Module 7 Calcul matriciel et algèbre linéaire		537
Chapitre 42 : Matrices		539
42.1	Premières notions sur les matrices	539
42.1.1	Définition des matrices	539
42.1.2	Addition et multiplication par un scalaire	540
42.1.3	Multiplication matricielle	541
42.1.4	Transposition	544

42.2	Interprétation matricielle des systèmes d'équations linéaires	544
42.3	Algèbre des matrices carrées	545
42.3.1	Introduction	545
42.3.2	Formule du binôme de Newton	547
42.3.3	Matrices carrées inversibles	548
42.3.4	Calcul de l'inverse par inversion de système	549
42.3.5	Déterminant d'une matrice carrée	551
Chapitre 43	: Vecteurs	556
43.1	Espace vectoriel \mathbb{K}^n	556
43.1.1	Addition de deux vecteurs	557
43.1.2	Multiplication par un scalaire	557
43.2	Bases de \mathbb{K}^n	558
43.3	Changement de base	561
43.4	Sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n	563
Chapitre 44	: Endomorphismes et matrices	570
44.1	Définition et exemples	570
44.2	Matrice d'un endomorphisme dans une base	572
44.3	Changement de base pour la matrice d'un endomorphisme	575
44.4	Composée de deux endomorphismes	578
Chapitre 45	: Fondements de l'algèbre linéaire	583
45.1	Espaces vectoriels	583
45.2	Sous-espaces vectoriels	585
45.2.1	Définition et caractérisation	585
45.2.2	Intersection de sous-espaces vectoriels	588
45.3	Bases d'un espace vectoriel	589
45.3.1	Définition et exemples fondamentaux	589
45.3.2	Familles libres et familles génératrices	590
45.3.3	Espaces vectoriels de dimension finie	593
45.4	Rang d'une famille de vecteurs	595
Chapitre 46	: Applications linéaires	601
46.1	Définition et exemples	601
46.2	Noyau d'une application linéaire	603
46.3	Matrice d'une application linéaire	604
46.4	Image d'une application linéaire	606
46.5	Théorème du rang	608

Chapitre 47 : Espaces euclidiens	612
47.1 Produit scalaire et orthogonalité	612
47.1.1 Produit scalaire de deux vecteurs	612
47.1.2 Norme d'un vecteur	614
47.1.3 Orthogonalité	615
47.2 Espaces euclidiens	616
47.2.1 Bases orthonormales	616
47.2.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel	618
47.2.3 Rotations de l'espace \mathbb{R}^3	619
47.2.4 Matrices orthogonales	620
Module 8 Probabilités	627
Chapitre 48 : Fondements du calcul des probabilités	629
48.1 Epreuves et évènements	629
48.2 Espaces probabilisés	632
48.2.1 Définition	632
48.2.2 Equiprobabilité	634
48.3 Probabilités conditionnelles	636
48.4 Indépendance	639
Chapitre 49 : Variables aléatoires discrètes finies	645
49.1 Qu'est-ce qu'une variable aléatoire?	645
49.2 Variables aléatoires discrètes finies	646
49.2.1 Loi de probabilité	646
49.2.2 Espérance, variance et écart-type	648
49.2.3 Fonctions de variables aléatoires	649
49.3 Modèles probabilistes discrets	651
49.3.1 Loi uniforme	651
49.3.2 Loi de Bernoulli	652
49.3.3 Loi binomiale	653
49.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	656
Chapitre 50 : Couples et sommes de variables aléatoires	662
50.1 Couples de variables aléatoires	662
50.2 Sommes de variables aléatoires	665
50.3 Coefficient de corrélation linéaire	667
50.4 Variables aléatoires indépendantes	669
50.5 Loi des grands nombres	672

Solutions des exercices	679
Solutions des exercices du module 1	679
Solutions des exercices du module 2	742
Solutions des exercices du module 3	771
Solutions des exercices du module 4	830
Solutions des exercices du module 5	861
Solutions des exercices du module 6	886
Solutions des exercices du module 7	919
Solutions des exercices du module 8	964
 Index	 990