CHAPITRE 1

TRIGONOMÉTRIE

Les fonctions trigonométriques sont d'une importance fondamentale. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :
A. Savoir utiliser le cercle trigonométrique.
B. Connaître les propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques (valeurs usuelles, symétries, etc).
C. Connaître les formules d'addition et de duplication.
D. Savoir linéariser $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$.
E. Connaître l'existence des formules de transformation de sommes en produits et de produits en sommes et savoir les retrouver.

1.1 Cercle trigonométrique

Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, centré en O (figure 1.1 page suivante). Un point M de ce cercle est repéré par un nombre réel x correspondant à la longueur de l'arc UM, affectée du signe correspondant au sens positif de rotation (sens trigonométrique). *Par définition du radian*, x est la mesure en radians de l'angle de vecteurs orienté $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}})$.

Par définition, $\cos x$ est l'abscisse du point M et $\sin x$ est son ordonnée. On définit en outre la *tangente* et la *cotangente* par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \ \ \operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{1.1}$$

On peut démontrer que $\tan x$ est l'abscisse du point d'intersection de la droite (OM) avec l'axe vertical passant par U (axe des tangentes), tandis que cotan

x est l'abscisse du point d'intersection de la droite (OM) avec l'axe horizontal passant par V (axe des cotangentes).

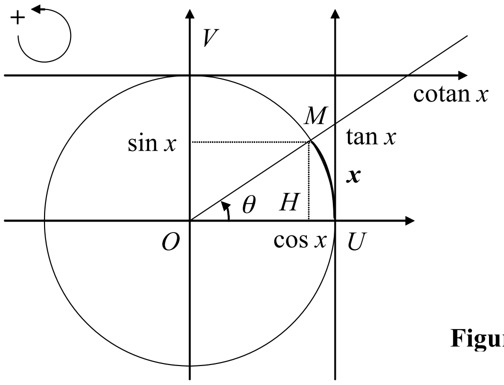

Figure 1.1

Les *lignes trigonométriques* de l'*angle* θ sont définies par

$$\sin\theta = \sin x, \quad \cos\theta = \cos x, \quad \tan\theta = \tan x, \quad \operatorname{cotan}\theta = \operatorname{cotan} x.$$

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OMH montre que

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{1.2}$$

Les *valeurs usuelles* du sinus, du cosinus et de la tangente, résumées dans le tableau ci-dessous, sont à connaître. Elles se retiennent facilement en remarquant que, pour le sinus par exemple, ces valeurs sont

$$\frac{\sqrt{0}}{2},\ \frac{\sqrt{1}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{4}}{2}.$$

Elles s'obtiennent à partir du cercle trigonométrique (exercice 1.1). On notera que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, puisque $2 = (\sqrt{2})^2$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie

Enfin, il résulte immédiatement de (1.2) que, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{1.3}$$

En effet, $1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

1.2 Symétries dans le cercle trigonométrique

Certaines propriétés des fonctions trigonométriques résultent des symétries dans le cercle trigonométrique et se *retrouvent très rapidement* dès lors qu'on fait un petit *dessin*. La première série de formules résulte de la figure 1.2 ci-dessous. Le cercle trigonométrique ayant une circonférence de longueur 2π, on a pour tout x réel

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \ \cos(x+2\pi) = \cos x. \tag{1.4}$$

Ceci exprime que les fonctions sinus et cosinus sont *périodiques* de période 2π. Il en est de même, bien sûr, pour la fonction tangente, mais 2π n'est pas la plus petite période de la fonction tangente. En effet, les points repérés par x et par $x+\pi$ sont diamétralement opposés. Donc, pour tout x réel,

$$\sin(x+\pi) = -\sin x, \ \cos(x+\pi) = -\cos x. \tag{1.5}$$

On en déduit que, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(x+\pi) = \tan x$.
C'est-à-dire que *la fonction tangente est périodique de période* π.

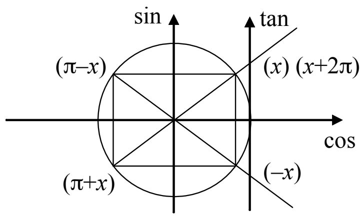

Figure 1.2

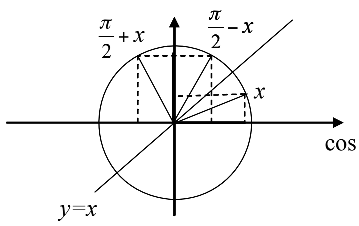

Figure 1.3

Par ailleurs, les points repérés par x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des cosinus. Donc, pour tout x réel

$$\sin(-x) = -\sin x, \ \ \cos(-x) = \cos x. \tag{1.6}$$

Ainsi, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(-x) = -\tan x$ (ce qui se voit aussi sur l'axe des tangentes). On traduit ceci en disant que les fonctions sinus et tangente sont *impaires*, tandis que la fonction cosinus est *paire*.

Enfin, les points repérés par x et $\pi - x$ étant symétriques par rapport à l'axe des sinus, on a pour tout x réel

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \ \ \cos(\pi - x) = -\cos x. \tag{1.7}$$

Par conséquent, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$.

Considérons maintenant la figure 1.3. On observe que les points repérés par x et $\frac{\pi}{2} - x$ sont *symétriques par rapport à la première bissectrice*. Leurs sinus et cosinus sont donc échangés. Ainsi, pour tout x réel,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x. \tag{1.8}$$

Par ailleurs, le point repéré par $\frac{\pi}{2} + x$ s'obtient à partir du point repéré par x par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Lors de cette rotation, $\cos x$ devient $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, tandis que $\sin x$ devient $-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ [attention aux signes : $\sin x$ est positif sur la figure, alors que $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est négatif]. Donc, pour tout x réel,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Ces formules, très importantes, se retiennent facilement si on se souvient des formules qui donnent la dérivée du sinus et du cosinus, et on a le

Théorème 1.1 *Ajouter $\frac{\pi}{2}$ à x dans un sinus ou un cosinus revient à le dériver, c'est-à-dire que pour tout x réel on a*

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (\sin x)' = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (\cos x)' = -\sin x.$$

1.3 Formules d'addition

Les formules d'addition, qui doivent être *connues parfaitement*, s'écrivent, pour tous a, b réels,

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{cases} \tag{1.9}$$

Démonstration : Considérons, sur le cercle trigonométrique de la figure 1.4, un arc de longueur a auquel nous ajoutons un arc de longueur b.
Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le point N a pour coordonnées $\cos a$ et $\sin a$.
Donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{ON} = \cos a\,\overrightarrow{i} + \sin a\,\overrightarrow{j}$.

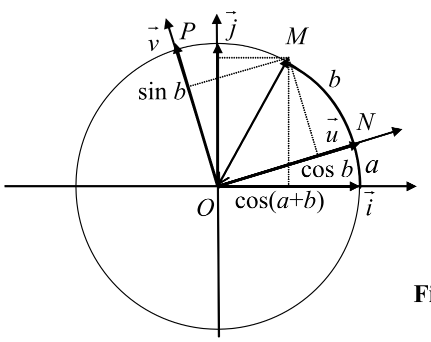

Figure 1.4

De même le point P a pour coordonnées $\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$, donc

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} = \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{j} = -\sin a\,\overrightarrow{i} + \cos a\,\overrightarrow{j}.$$

Dans le cercle trigonométrique du repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, le point M a pour coordonnées $\cos b$ et $\sin b$, donc $\overrightarrow{OM} = \cos b\,\overrightarrow{u} + \sin b\,\overrightarrow{v}$. En utilisant les expressions de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, il vient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos b(\cos a\,\overrightarrow{i} + \sin a\,\overrightarrow{j}) + \sin b - \sin(a\,\overrightarrow{i} + \cos a\,\overrightarrow{j})\\ &= (\cos b\cos a - \sin b\sin a)\,\overrightarrow{i} + (\cos b\sin a + \sin b\cos a)\,\overrightarrow{j}.\end{aligned}$$

Or dans le cercle trigonométrique du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a également $\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\,\overrightarrow{i} + \sin(a+b)\,\overrightarrow{j}$. En identifiant les deux expressions de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on obtient les formules d'addition (1.9).

Des formules d'addition (1.9) on déduit la formule d'addition pour la fonction tangente, à connaître mais surtout à *savoir retrouver* (exercice 1.2).

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \tag{1.10}$$

1.4 Formules de duplication

En faisant $a = b = x$ dans les formules d'addition, on obtient immédiatement les *formules de duplication* :

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,\;\; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\;\; \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

En utilisant la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on peut transformer la formule de $\cos 2x$ en remplaçant, soit $\sin^2 x$ par $1-\cos^2 x$, soit $\cos^2 x$ par $1-\sin^2 x$. On obtient deux autres formules pour $\cos 2x$:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \quad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \tag{1.11}$$

A partir de (1.11), on obtient immédiatement les *formules de linéarisation* de $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$, que l'on doit savoir retrouver rapidement :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \tag{1.12}$$

1.5 Transformations de produits en sommes

On peut transformer en une somme un *produit de deux sinus*, ou un *produit de deux cosinus*, ou le *produit d'un sinus et d'un cosinus*. Il n'est pas utile de connaître ces formules par coeur, mais il faut savoir qu'elles existent et savoir les retrouver rapidement. On les obtient à partir des formules d'addition. Partons d'abord de

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Remplaçons b par $-b$. Puisque la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus paire, on obtient

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient immédiatement la première formule de transformation de produit en somme :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]. \tag{1.13}$$

Partons maintenant de $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. En remplaçant de nouveau b par $-b$, il vient $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. En additionnant ces deux égalités, on obtient la deuxième formule de transformation de produit en somme :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]. \tag{1.14}$$

En les soustrayant, on obtient la troisième formule de transformation de produit en somme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]. \tag{1.15}$$

1.6 Transformations de sommes en produits

Inversement, on peut transformer des sommes ou différences de deux sinus ou deux cosinus en produits de fonctions trigonométriques. Ces formules se retrouvent également à partir des formules d'addition, en notant que

$$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}.$$

Ainsi, par exemple, on a

$\sin p + \sin q = \sin\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right)$
$= \sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} + \cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} + \sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} - \cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
$= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$

D'où la première formule de transformation de produit en somme :

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}. \tag{1.16}$$

De même on obtient facilement

$$\left\{\begin{array}{l} \cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2} \end{array}\right. \tag{1.17}$$

On notera que $\sin p - \sin q$ peut s'obtenir en remplaçant q par $-q$ dans (1.16) .

Exercices du chapitre 1

Les basiques

Exercice 1.1 (A,B) Calculer les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour $x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$ à partir du cercle trigonométrique. On pourra faire apparaître des triangles remarquables.

Exercice 1.2 (C) Démontrer la formule (1.10).

Exercice 1.3 (A,B,C) Calculer les valeurs des sinus et cosinus de a, b et $a+b$ sachant que
a) $\cos a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos b = -\frac{1}{2}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \pi$.
b) $\sin a = \frac{2}{5}$, $\sin b = \frac{3}{5}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < b < \pi$.

Exercice 1.4 (B) Calculer $\sin\theta$, sachant que $\tan\theta = 3\cos\theta$.

Exercice 1.5 (C) Démontrer que $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Exercice 1.6 (C) Calculer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$.
En déduire que $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos\frac{7\pi}{9}$, $x_3 = \cos\frac{13\pi}{9}$ sont solutions de l'équation du troisième degré $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Exercice 1.7 (C) Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

Exercice 1.8 (B,C) Simplifier les sommes suivantes :
1) $S_1 = \cos\omega t + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$.
2) $S_2 = \sin\omega t + \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} + \sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right)\cos\frac{3\pi}{4}$.

Exercice 1.9 (C) Démontrer les relations suivantes :
1) $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$.
2) $\sin(x+y)\cos(x-y) = \sin x\cos x + \sin y\cos y$.
3) $\tan x - \tan y = \dfrac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$.

Exercice 1.10 (D) Démontrer que $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$.

Exercice 1.11 (B,D) 1) Montrer que $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.
2) En déduire la valeur de

$$S(x) = \cos^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Exercice 1.12 (E) Démontrer que $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$.

Exercice 1.13 (B,C) Soit $\cos x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.
Calculer $\cos 2x$ et en déduire x.

Exercice 1.14 (B,E) Simplifier $\dfrac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$. En déduire $\tan\dfrac{\pi}{24}$.

Les techniques

Exercice 1.15 Démontrer que

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}.$$

Exercice 1.16 On pose $t = \tan\frac{x}{2}$. Démontrer que

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 1.17 x et y sont deux nombres réels compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et vérifient $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.
1) Montrer que $0 \leq x + 2y \leq \frac{3\pi}{2}$.
2) Calculer $\tan(x+2y)$. En déduire la valeur de $x + 2y$.