

Préface d'Alain Le Méhauté

Il est aujourd'hui aisé de reprendre les propos de Claude Allègre qui, en 2006, écrivait: « Je n'ai personnellement aucun doute sur le fait que la découverte des fractales est l'une des grandes percées scientifiques de la seconde partie du XX^e siècle. » Nous étions toutefois loin de cette reconnaissance, lorsque à la fin des années soixante-dix et au début des années quatre-vingts, Benoît Mandelbrot était reçu en France par quelques rares scientifiques négligeant les intérêts immédiats de leur communauté. Le mathématicien était loin de cette reconnaissance lorsque, dans des voitures trop étroites pour sa corpulence imposante (imaginez Benoît dans une Renault 4 gêné par le changement de vitesse au tableau de bord) il fallait aider l'homme de caractère qu'il fut, à chercher des journaux à deux heures du matin dans Paris endormi (heureusement le drugstore Opéra restait ouvert toute la nuit) puis le reconduire à son hôtel où cordialement il proposait encore un verre. Sa vitalité était aussi impressionnante que sa culture générale. Le livre de vulgarisation qu'il avait publié aux éditions Flammarion en 1975 avait soulevé bien des réserves. Il s'en moquait. Sans même entrer dans les détails des travaux antérieurs de son auteur – mais mieux valait l'avoir fait –, il suffisait en effet de parcourir l'ouvrage pour que s'illumine une nouvelle vision du monde. La beauté éclaire les idées simples. Elles sont souvent parmi les plus profondes et les plus productives. La beauté était ici le fruit du sens que confère aux choses l'universalité du singulier lorsqu'elle subsume la doxa. À la fin de la période citée, cette beauté fut illustrée par des objets bientôt appelés *Ensembles de Mandelbrot* puis par la représentation des ensembles de Julia merveilleusement poussés par « Jean-Fractal » Colonna jusque dans le corps des quaternions.

Beaucoup de savants s'étaient penchés sur le berceau des objets auto-similaires. Il est impossible de citer tous ces scientifiques. Certains ont cependant laissé leur nom dans l'histoire: Apollonius, Leibniz, Weierstrass, Cantor, Peano, et d'autres qui, tel Hausdorff, ont pris le risque d'opposer le sens, au-delà de la seule assurance scientifique, y compris à la barbarie. Aucune de ces personnalités cependant n'avait vulgarisé l'évidence empirique de la propriété en question. *L'autosimilarité*, voilà précisément ce qui faisait sens dans le petit livre de 1975! Sans doute fallait-il pour l'exhumer comme une évidence, disposer d'un autre métier que celui de « chercheur patenté ». Mandelbrot avait quitté la France et, – sur les conseils de son oncle, membre du groupe Bourbaki –, le milieu académique en 1954. Mesurer l'importance d'un simple substantif n'est pas donné simplement, même aux techniciens de l'ontologie. « Fractal » ce mot, issu du latin *fractus*, s'inscrivait naturellement dans la perspective leibnizienne des plis multiples: « Dieu a choisi celui des mondes possibles qui est le plus parfait, c'est-à-dire celui qui est en même temps le plus simple en hypothèses et le plus riche en phénomènes. » Les phénomènes étaient sous nos yeux et nous ne savions les voir faute de mot pour les dire.

Comme affirme la vulgate, *l'idée était dans l'air*. Certes, et depuis Mandelbrot dans la lignée des plus grands penseurs. La précision englobante du concept, mais aussi son artistique « impression », permirent en effet une déclinaison

nouvelle de problématiques scientifiques en suspens à la fin du XX^e siècle, en particulier celles que le présent ouvrage et toutes ses références recensent. Il n'est pas un champ disciplinaire qui n'ait été touché par les vagues applicatives d'une « fractalité » qui ouvrirent des brèches dans certaines digues paradigmatiques pourtant solidement ancrées. La réponse à ce champ de vagues illustra cependant l'analyse de Thomas Kuhn touchant à la puissance d'assimilation de la « science normale ». Celle-ci amortit avec brio certaines notes discordantes comme en témoigne à titre non limitatif les notions de dimension spectrale, celle de diffusion « anormale » ou celle de « constructal », des termes qui au-delà de leur usage désormais parlent essentiellement d'eux-mêmes.

À la différence de ses nombreux homologues focalisés sur la question du *comment des fractals*, le présent ouvrage, se garde de gommer la question ouverte du *pourquoi l'universalité de la fractalité*. Il illustre utilement l'ouverture du concept en visant une génération de lecteurs qui ne sait souvent rien des hésitations qui affectent toute démarche créative. Oubliant la différence entre les opérateurs d'appartenance et d'inclusion ensembliste, les tenants d'une pédagogie normale et d'un rationalisme anhistorique retranchent avec soin ces hésitations de présentations utilitaristes souvent exagérément auto-cohérentes. Bien des questions restent pourtant encore ouvertes. L'incomplétude que portent les hésitations – facilement repérables dans toutes les affirmations qui concernent la fractalité –, doit donner à réfléchir aux élèves et aux étudiants qui demain tenteront de laisser leurs marques sur la science des Systèmes complexes encore en attente d'une grammaire spécifique qui puisse être mise en action.

Si en effet, la fractalité en est un attribut majeur puisqu'elle elle conduit à une complexité opérationnelle, dite de Kolmogorov, généralement faible (les programmes sont de petites tailles), la complexité au sens de l'intrication de ses composantes et du nombre d'opérations requises pour atteindre l'objet final (profondeur de Bennett), sa multiplicité n'en reste pas moins infinie. L'objet complexe dans ses moindres détails est physiquement inconsistant ; ce livre en donne moult exemples. Le phénomène en fractalité reste irréductiblement, multiplement et asymptotiquement tissé. À son propos le concept seul reste insuffisant. À cela l'homme de science en mesure la richesse bien plus que les seules limites. La complexité phénoménologique brise certes le fameux rêve de Laplace quant au déterminisme absolu du monde dans lequel nous sommes plongés, mais aussi en partie celui de Mandelbrot (que, ce faisant elle magnifie) puisqu'elle donne enfin à penser scientifiquement ce que Husserl qualifiait de « *Zeit Objekt* » (temps-objet) ramenant sur le devant de la scène, comme le montre l'ensemble de Mandelbrot, la question du temps ou plus précisément du lien entre le temps et l'espace, que malgré des efforts courageux et souvent naïfs, quarante années de recherche sur les géométries fractales n'ont pas encore correctement éclairé.

Dans cette perspective il n'est pas indifférent que la fractalité illustre sous une forme paradoxale, l'affirmation d'Anderson « *More is different* », titre de son célèbre article de 1972, car elle pointe aussi le lien étroit qui associe l'intrication à une notion qui dépasse la simple géométrie et touche à la combinatoire : la notion « de phénomène en fractalité ». C'est lui qui porte le temps requis à notre être au monde. Il reste en particulier à comprendre ce qui conjoint la temporalité à l'intemporalité ; la simplicité algorithmique à la complexité géométrique ; la

consistance de l'étant à l'inconsistance de l'être; la réversibilité à l'irréversibilité; l'échelle au phénomène; l'excès temporel (la durée) aux bornes de l'infini; le vide à la multiplicité du même infini. Pour l'essentiel, ce chantier a été laissé en friche et c'est pour cette raison que des ouvrages de vulgarisation, par nature objets d'une herméneutique, ont encore leur rôle à jouer auprès de générations certes nées avec l'héritage que constitue la géométrie fractale – désormais adossée à l'informatique –, mais dont le devoir sera d'en expliquer l'universalité immanente et la singularité transcendante.

Pourquoi les objets du monde naturel ont-ils si souvent des métriques fractales? Pourquoi sont-ils cependant si divers? Quelles relations tiennent-ils avec le monde vivant et le monde social, voire le monde de l'esprit? Les réponses à ces questions restent encore floues évidemment et s'il est vrai que des mathématiciens de renom ont fait progresser notre compréhension des fondements de la fractalité, – parmi les modernes je pense en particulier à Tom Leinster de l'université d'Edimbourg –, il reste à vulgariser une pensée dont la subtilité n'a dégal que la profondeur encore insondable de ce que l'on finira un jour par nommer « simplicité ». Comme l'affirme Laurent Nottale :

il faut bien qu'il y ait à l'origine (de la fractalité) un principe aussi prégnant (à titre d'exemple) que celui de la relativité pour dire le pourquoi à son universalité.

Ce que révèlent les géométries fractales dans leurs fondements mathématiques, c'est une intrication irréductible entre l'arithmétique adjointe des mécanismes d'engendrement pas à pas, c'est-à-dire adjointe de leurs *présentations* algébriques, donc du temps standard, et la géométrie adjointe des outils de *représentation* des sur-structures susceptibles de compter pour « un » l'objet fractal dans son infinitude, celle-ci exigeant pour « être », de disposer de brisure, de glissement, pour tout dire d'un temps en excès sur le temps « computé ». Ce que nous dit la géométrie fractale, au moins implicitement, c'est que lien entre le local et le global pourrait tenir d'une supra localité exigeant un retournement kleinien dans l'épaisseur de l'espace-temps. Il pourrait tenir d'un adossement complexe qui pour exister *hic et nunc* doit briser tout ordonnancement. Comment donner à penser les moyens d'un dénouement de cet imbroglio temporaire ?

On doit à Bhaskar Bagchi d'avoir pointé le lien entre « fractalité » et les zéros de la fonction universelle zéta de Riemann. Cette fonction est l'expression d'une intrication entre l'addition (vue comme un coproduit catégorique) et la multiplication (au travers de son lien avec les nombres premiers : formulation d'Euler). Or cette intrication se résout, on ne sait toujours pas vraiment pourquoi, dans un espace dit de Peano ($d=2$) où la consistance se confond à une inconsistance par simple annulation d'un paramètre d'ordre. Tel est le sens physique naturel de la *Conjecture de Riemann* vue comme expression de l'universalité en « fractalité ». C'est en créant un espace vectoriel – de dimension infini sur le corps des nombres premiers – susceptible de servir de base aux fonctions zéta, que Philippe Riot a établi, voici peu, l'évidence de l'autosimilarité de ces fonctions. J'entends là les techniciens : *évidence n'est pas démonstration* affirment-ils et nous avec eux. Certes, et sans doute le chemin reste-t-il à paver plus précisément qu'il n'a été fait en usant de la seule théorie des catégories. Il reste donc aux mathématiciens de métier à jouer. Toutefois, là encore, ce qui

importe c'est le sens que doit prendre le chemin ; la direction qui est dite : les fonctions zéta et polyzéta, expression de l'intrication dans toute sa généralité arithmétique, portent en elles quelque chose de plus que la simple fractalité dont elles émanent cependant sans conteste. Peut-être dessinent-elles aujourd'hui le prologue d'un récit qui bien qu'adossée à cette fractalité, n'est pas encore en état d'être étendu, voire même simplement entendu.

Pour des raisons pratiques le temps de l'entendement viendra ! Si le monde scientifique est loin d'avoir exploré tous les ressorts de la géométrie fractale, sans doute sommes-nous plus loin encore, en dépit des besoins, d'en avoir exploré toutes les composantes temporelles dont le groupe des fonctions zéta est porteur au travers du facteur d'échelle complexe qui fait structure. Par un étonnant retournement de l'histoire, ce que nous dit en effet explicitement sa géométrie lorsqu'elle est mise en situation, fait crédit aux objections formulées par Bergson dans sa controverse avec Einstein.

L'Univers dure. Plus nous approfondissons la nature du temps, plus nous comprendrons que durée signifie invention, création de formes, élaboration continue de l'absolument nouveau.

Cette nouveauté, ce découplage du réel par un jeu de miroir avec l'infini, l'état « fractalité » nous les donne à la voir, mais aussi à construire... ce qui prend du temps. L'énergie alors mise en œuvre impose un lien linéaire appelée *vitesse* entre le temps et l'espace. La notion de vitesse apparaît en outre dans toutes les constantes physiques universelles auxquelles nous ferons appel. À l'opposé, loin de la vitesse, le temps apparaît en « fractalité » selon deux modalités distinctes qui ont chacune perdu leur linéarité du fait du couplage (voire de l'équivalence) avec la dimension non entière. Si l'une peut être rabattue sur l'espace physique par un artefact adéquat (analyse spectrale et distributions), celui d'une « multiplicité consistante » (A. Badiou), la clôture énergétique, imposée par l'action qui est aussi le moment angulaire d'un éternel retour, conduit à l'émergence d'une temporalité nouvelle, « temps événement », « multiplicité inconsistante » irréductible, discrétisée selon une dimension alors purement complexe, portée par l'invention, la volonté, et la décision du roi Dragon. C'est le temps des événements rares : celui du Cygne noir, celui de la fracture, celui de la relaxation des contraintes, celui du séisme qui transforme une singularité locale en un ordre global, une simple fluctuation en un ordonnancement à longue distance... et/ou l'inverse. Comme dit Valentin dans la pièce *Arcadia*, « la nature s'invente, quelle que soit l'échelle, du plus petit flocon, à la tempête de neige ». On sait ce que détruisent les tempêtes mais on sait généralement moins ce qu'elles autorisent lorsqu'elles opèrent dans les crânes ou sur des « systèmes immunitaires » confrontés en situation à des toxiques.

Nous sommes là, loin de notre point de départ, en fait presque cinquante années plus tard ; une vie donc ! Benoît Mandelbrot nous a quittés fin 2010. La trace qu'il laisse dans l'histoire des sciences est considérable non point seulement par l'influence qu'il a eue, mais aussi par celle qu'il aura demain. Le travail laissé en suspens est là, sur notre bureau, d'une certaine manière accusateur, car les élèves du maître et ses émules, entre autres, n'ont fait que débroussailler une partie seulement de la parcelle de nature qu'il nous a léguée, sans savoir souvent comment en valoriser les gravats. Des constructions bancales

ont été plantées sur ce terrain à la fois mouvant et en désordre. Elles ressemblent encore aux constructions anciennes. Certains, les plus nombreux, veulent croire en leur pérennité et ostracisent les « écologistes ». Ces derniers mesurent tout le chemin qui reste à parcourir pour valoriser le sol et bricolent des constructions plus originales qu'ils savent tout aussi temporaires que les bâtiments standards. L'industrialisation de ces solutions nouvelles constituera le travail de plusieurs générations car il en va des investissements en matières scientifiques comme des investissements boursiers... Le temps du retour est toujours décompté au profit du court terme. Ce livre ne s'inscrit pas dans cette perspective et c'est ce qui en fait le prix.

Pr. Dr. Alain Le Méhauté
Materials Design Inc. & Département de physique
Université fédérale de Kazan (Russie)

PREMIÈRE PARTIE

La géométrie trans-échelles

Les géométries développées par les sociétés humaines à travers les âges dépendent beaucoup de l'environnement vécu et du milieu qu'elles pratiquent. Elles se forgent en relation à ce que la perception sensorielle des humains de cette époque et à ce que les instruments de prospection et de mesure de l'espace environnant leur permettent de saisir : une géométrie est relative au milieu et aux espaces perçus et expérimentés.

La géométrie euclidienne a été formalisée dans l'Antiquité gréco-égyptienne, à une époque où le monde cartographié se réduisait au bassin méditerranéen. La géométrie euclidienne – associée au calcul différentiel et intégral introduit par Newton et Leibniz au XVII^e siècle – est apparue comme suffisante jusqu'au début du XIX^e siècle. Mais le déploiement industriel et les avancées scientifiques du XIX^e siècle ont exigé l'invention de nouvelles géométries dites non euclidiennes (hyperbolique, elliptique) qui ont mené à la géométrie fractale à la fin du même siècle. L'application de la géométrie fractale à la physique et à la nature après la Seconde Guerre mondiale nous permet d'accéder à des dimensions cachées de l'Univers, de faire face au vertige cinétique d'un Univers en matriochkas où tout bouge sur un large éventail de vitesses que ce soit vers les échelles des particules ou alors vers les échelles du cosmos, et de saisir en conséquence le vertige d'une gamme d'échelles très étendue de l'échelle de Planck ($l_p = 10^{-35}$ m) au rayon de Hubble ($R_H = 10^{30}$ m).

Un monde d'illusions et de vertiges

Ouvrir des portes, cela fait des courants d'air.

Georges Dumézil

Alors créons des turbulences...

Un colibri fait du sur place dans un wagon de train se déplaçant à vitesse constante. Les parois du wagon vont-elles percuter l'oiseau ? Doit-il voler plus vite pour accompagner le train ? Nous savons que non : il lui suffit de battre des ailes comme il le ferait dans un référentiel au repos. Le mouvement en soi n'existe pas. Voilà ce que nous a appris Galilée (1564-1642) par son *principe de relativité*. Un corps ne se meut que par rapport à un autre corps. Comme le colibri dans le wagon, nous nous mouvons sur la Terre et la suivons dans son mouvement propre, ce qui fait que nous ne nous apercevons de rien et nous pourrions aisément nous croire dans un milieu au repos. Et pourtant, nous savons qu'il n'en est rien.

1.1. Vertige cinétique de notre Univers à toutes les échelles

La Terre est notre repère spatial de référence. Il nous paraît stable et immuable. La Terre semble ne pas bouger, mais c'est un leurre... une illusion. Heureusement d'ailleurs, car autrement le vertige serait trop puissant : la relativité du mouvement nous protège et nous tisse un cocon cinétique. Une niche cinétique ! Car à l'extérieur de cette niche, tout va très vite, à tous les étages et dans tous les sens ! En effet, comment imaginer qu'en cet instant même où vous lisez ce texte, et sans vous en apercevoir, sans rien ressentir, vous vous déplacez (plus ou moins) dans l'espace à plus de 1 200 km/seconde ! Mais ce déplacement lui aussi est relatif. Il est établi par rapport à un énorme amas de galaxies appelé le « Grand attracteur » qui, en fait, s'éloigne paradoxalement de nous dans le mouvement général d'expansion de l'Univers. Une vitesse de 1 200 kilomètres par seconde, cela semble incroyable, en voici le décompte (voir fig. 1.1). La Terre tourne sur elle-même à environ 0,3 km/s. La Terre tourne autour du soleil à raison de 29,8 km/s. Le système solaire tourne à 230 km/s autour du centre de notre galaxie, la Voie Lactée, et en fait le tour en 250 millions d'années. C'est-à-dire que notre dernier passage dans la position actuelle a déjà eu lieu à la limite Permien-Trias, il y a 250 millions d'années. Mais ce n'est pas tout. La Voie Lactée se rapproche de la nébuleuse d'Andromède à 120 km/s, de ce fait, une collision

entre *Andromède* et la *Voie Lactée* est possible et pourrait se produire dans approximativement 3 milliards d'années. Mais, ces deux galaxies se dirigent aussi vers l'amas de la Vierge et du superamas de l'Hydre et du Centaure à une vitesse se situant entre 150 et 300 km/s. Et enfin, tout cet équipage cosmique fonce vers le « Grand Attracteur » à une vitesse actuellement évaluée à 800 km/s.

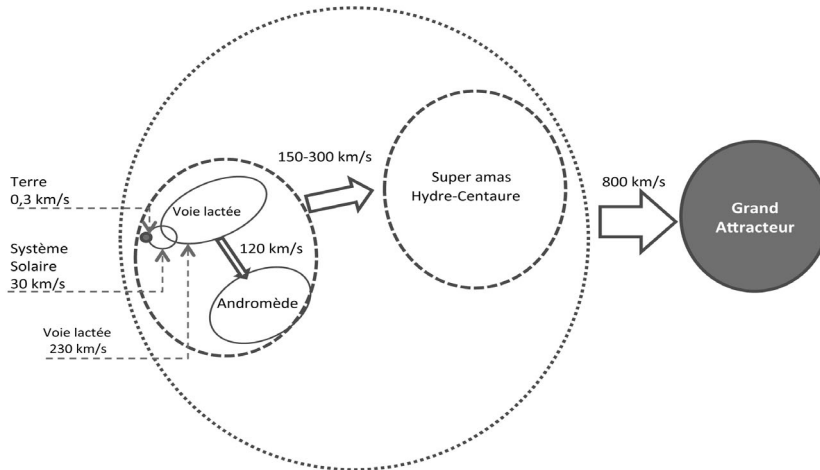


Fig. 1.1. Vertige cinétique.

Représentation en schéma des vitesses emboîtées de l'Univers. Une telle hiérarchie imbriquée de vitesses fait inévitablement penser à une forme de turbulence cosmologique.

Comment ne pas être pris par le vertige cinétique... Un slogan resté célèbre en mai 1968 lançait « Arrêtez-la Terre ! Je veux descendre ! » : il sera difficile d'exaucer un tel souhait. Notre pauvre imagination est bien incapable de rendre compte de ces fantastiques mouvements relatifs dans plusieurs directions qui, cumulés, nous propulsent dans l'espace-temps de l'Univers aux environs de 1 200 km/s dans un véritable tourbillon multidirectionnel, alors que rien ne semble bouger. Le corollaire de cette surprenante mobilité intersidérale est que depuis que vous avez ouvert ce livre, il y a environ dix minutes, vous vous êtes déplacé de plus de 600 000 km... C'est littéralement stupéfiant. Pensez qu'il y a une heure, nous étions à 4 millions de kilomètres... En outre à l'autre bout de l'échelle, dans l'infiniment petit, les atomes qui nous constituent sont formés d'un noyau entourés d'électrons qui tournent sur des orbitales à des vitesses de 3 000 km/s ($1/137 \times 300\,000$)... Ce monde de toupies est littéralement vertigineux et tout cela sans que nous nous en apercevions !