

# Chapitre I : GÉNÉRALITÉS

## I Problèmes généraux posés par les engrenages

### I.1 Définition

Un engrenage est un mécanisme de transformation de mouvement constitué de 3 éléments :  
 - 2 roues dentées qui sont en fait des cames à profils multiples ;  
 - 1 bâti permettant d'assurer la position relative de ces deux roues.

### I.2 Fonctions principales d'un engrenage

#### I.2.1 Mécanisme de transformation de mouvement

Soit :  $S_1$  et  $S_2$  les cames à profils multiples ;  
 $S_0$  le bâti.

Sachant que les liaisons de  $L_{10}$  et  $L_{20}$  sont à 1 degré de liberté (translation ou rotation).

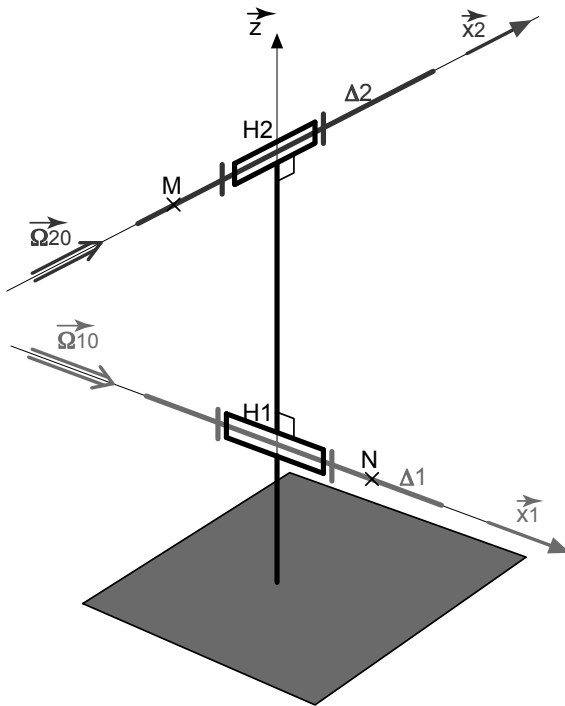


Fig I.1

On distingue deux sortes d'engrenages.

- transformation d'un mouvement de rotation en un mouvement de rotation.
- transformation d'un mouvement de rotation en un mouvement de translation.

Nous étudierons surtout le cas, d'un mécanisme transformant une rotation en une autre rotation, d'axes fixes, défini figure I.1.

Dans ce cas, l'engrenage permet d'assurer une relation cinématique entre  $\omega_{10}$  et  $\omega_{20}$ .  $\omega_{i0}$  représente la vitesse de rotation du solide  $S_i$  par rapport au bâti  $S_0$ , de la forme

$\omega_{20} = k \omega_{10}$  où  $k$  est en général une constante.

$\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont les axes de rotation.

$\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  sont les vecteurs unitaires associés à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

$\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  sont fixes par hypothèse.

$H_1H_2$  est la perpendiculaire commune à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

Les éléments de réduction des torseurs cinématiques s'écrivent :

$$\{C_{10}\}_N = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\omega_{10} \cdot \overline{x_1}} \\ \overline{0} \end{array} \right\}_{N \in \overline{x_1}} \quad \{C_{20}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\omega_{20} \cdot \overline{x_2}} \\ \overline{0} \end{array} \right\}_{M \in \overline{x_2}}$$

L10 est une liaison pivot d'axe  $\overline{x_1}$  et L20 est une liaison pivot d'axe  $\overline{x_2}$

Pour que l'ensemble soit isostatique, il faut que L12 soit à 5 degrés de liberté (contact ponctuel).

### I.2.2 Mécanisme de transmission de puissance.

Pour les applications de mécanique générale, la puissance seule, n'est pas un critère dimensionnant, il suffit de comparer le dimensionnement d'une boîte de vitesses d'un tracteur de semi remorque de 44 tonnes (260 KW à 2 800 tr/min) et celle d'une Formule 1 (650 KW à 18 000 tr/min), pour s'en convaincre. C'est le couple qui est dimensionnant.

La puissance est dimensionnante pour les engrenages dit "Grande vitesse", c'est-à-dire ayant une vitesse d'engrènement supérieure à 10m/s, où bien souvent le dimensionnement est conditionné par la dissipation de la puissance perdue et le débit d'huile.

La puissance est également importante pour évaluer l'énergie dissipée.

Revenons dans le cadre de la mécanique générale.

Les éléments de réduction du torseur des efforts extérieurs appliqué à l'arbre 1 sont :

$$\{T_{E1}\}_N = \left\{ \begin{array}{c} \overline{R_{E1}} \\ \overline{M_{E1}} \end{array} \right\}_N \quad \text{avec } \overline{M_{E1}} \cdot \overline{x_1} = C_1$$

Les éléments de réduction du torseur des efforts transmissibles par la liaison L10 sont :

$$\{T_{O1}\}_N = \left\{ \begin{array}{c} \overline{R_{O1}} \\ \overline{M_{O1}} \end{array} \right\}_N \quad \text{avec } \overline{M_{O1}} \cdot \overline{x_1} = 0$$

Les éléments de réduction du torseur des efforts extérieurs appliqué à l'arbre 2 sont :

$$\{T_{E2}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \overline{R_{E2}} \\ \overline{M_{E2}} \end{array} \right\}_M \quad \text{avec } \overline{M_{E2}} \cdot \overline{x_2} = C_2$$

Les éléments de réduction du torseur des efforts transmissibles par la liaison L02 sont :

$$\{T_{O2}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \overline{R_{O2}} \\ \overline{M_{O2}} \end{array} \right\}_M \quad \text{avec } \overline{M_{O2}} \cdot \overline{x_2} = 0$$

Si l'on considère que toutes les liaisons sont parfaites et que le régime est stationnaire, l'application du théorème de l'énergie puissance à l'ensemble (S1-S2-S0) donne :

$$C_1 \omega_{10} + C_2 \omega_{20} = 0 \quad \text{soit : } \frac{C_2}{C_1} = -\frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = k$$

Conclusion : Le rapport des couples est dans le rapport inverse des vitesses.

La transmission d'un couple important est conditionnée par la nature de la liaison L12 et son comportement.

Analysons brièvement les deux solutions répondant à ce problème :

## I.3 Analyse des solutions techniques

## I.3.1 Solution utilisant le phénomène d'adhérence. Fig I.2

Il faut rechercher les surfaces axoïdes, ou proche de celles-ci, et imposer un effort presseur au contact. Dans ce cas :

- le couple est proportionnel à l'effort tangentiel T,
- l'effort tangentiel T est égal au produit N.f, à la limite de l'adhérence,

N est la composante normale de l'effort, limité par la pression superficielle admissible au contact.

f est le coefficient d'adhérence maximal,

La conséquence technologique de ces 3 points est que les mécanismes associant les meilleurs couples de valeurs (f;  $\sigma_{HMax}$ ) ont des performances limitées n'excédant pas dans le meilleur des cas 100 KW et une puissance massique très faible de l'ordre de 0,05 à 0,1 KW/kg.

$$\text{avec : } \vec{v} = \frac{\vec{V}(M \in S_1/S_2)}{|\vec{V}(M \in S_1/S_2)|}$$

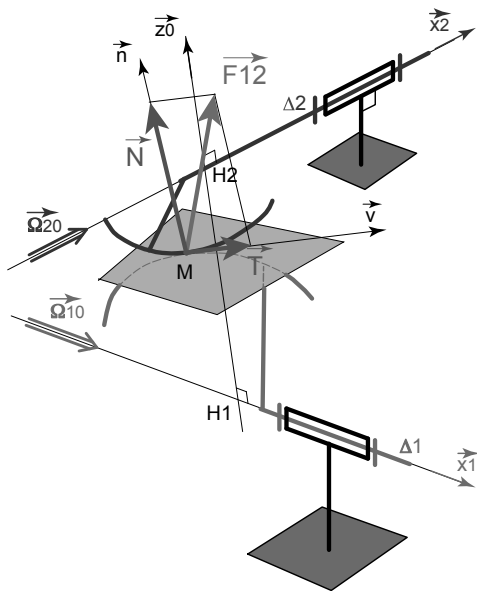


Fig I.2

## I.3.2 Solution utilisant un entraînement positif par obstacle.

Expression du couple transmis  $C_1$  :

$$C_1 = [\overline{H_1M} \wedge \overline{F_{2/1}}] \cdot \vec{x}_1$$

$$C_1 = |\overline{H_1M}| \cdot |\overline{F_{2/1}}| \cdot \sin(\overline{H_1M}, \overline{F_{2/1}})$$

Dans ce cas :

$|\overline{F_{2/1}}|$  est grand et est limité par la pression superficielle admissible au contact en M, et la résistance de la "dent". L'étude conduisant au dimensionnement des engrenages, telles que les "dents" supportent les efforts appliqués est développée dans l'ouvrage "ETUDE DYNAMIQUE DES DENTURES selon l'ISO 6336".

Le sinus doit être maximal, c'est-à-dire voisin de 1. L'angle  $(\overline{H_1M}, \overline{F_{2/1}})$  doit être voisin de  $90^\circ$  pour une géométrie donnée.

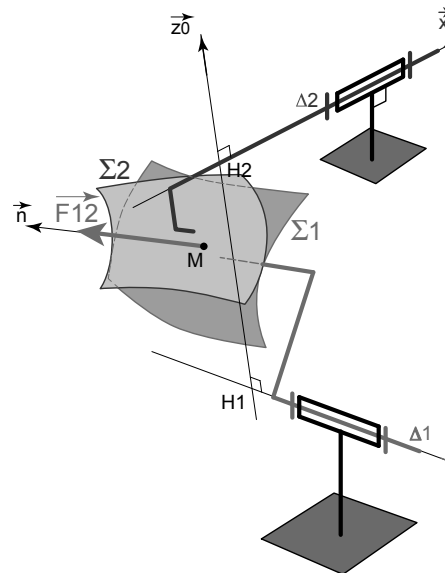


Fig I.3

$\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont deux surfaces conjuguées et leur étude fait appel à la théorie des enveloppes, cette étude sera développée dans le paragraphe II "RECHERCHE DES SURFACES CONJUGUÉES"

L'engrènement et la continuité de l'engrènement doivent être assurés et leurs études font appel à la géométrie des engrenages, objets de ce livre "ENGRENAGES CYLINDRIQUES - ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE".

#### I.4 Évaluation des pertes dissipées au contact et conséquences

Les pertes doivent être minimales, non seulement pour assurer un bon rendement mais aussi pour gérer la puissance dissipée, minimiser l'usure et optimiser le phénomène de grippage.

Conséquence de cette minimisation sur l'implantation géométrique des surfaces conjuguées  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

Soit :  $\overline{V(M \in S_2 / S_1)}$  la vitesse de glissement du point M appartenant à  $S_2$  par rapport à  $S_1$ .

$\vec{n}$  la normale en M au plan tangent commun à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

$$\overline{V(M \in S_2 / S_1)} \perp \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{t} = \frac{\overline{V(M \in S_2 / S_1)}}{|\overline{V(M \in S_2 / S_1)}|}$$

Lorsqu'il y a glissement, la loi de Coulomb s'écrit :  $\overline{F_{2/1}} = N_{2/1} \cdot \vec{n} + T_{2/1} \cdot \vec{t}$   
avec :  $T_{2/1} = N_{2/1} \cdot f$  ; f représente le coefficient de frottement.

La puissance dissipée par frottement au niveau du contact s'écrit :

$$P_f = \{T_{2/1}\} * \{C_{21}\} = [N_{2/1} \cdot \vec{n} + T_{2/1} \cdot \vec{t}] \cdot |\overline{V(M \in S_2 / S_1)}| \cdot \vec{t}$$

\* : Opérateur comment de deux torseurs.

$$P_f = N_{2/1} \cdot f \cdot |\overline{V(M \in S_2 / S_1)}|$$

L'analyse de cette expression montre que pour minimiser la puissance dissipée, f et  $V(M \in S_2 / S_1)$  doivent être mini. Minimiser f fait appel à la théorie du frottement et minimiser  $V(M \in S_2 / S_1)$  implique d'avoir un point caractéristique M entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  situé au voisinage de l'axe central du torseur cinématique  $\{C_{21}\}$ .

L'étude des engrenages passe donc nécessairement par celle des surfaces axoïdes du mouvement de  $S_2/S_1$ , cette étude est développée au paragraphe II : Recherche des surfaces axoïdes et classification des engrenages.

#### I.5 Remarque sur la nature du contact et ses conséquences

En général, pour un engrenage cylindrique, le contact théorique entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sur les dents est nominale linéique rectiligne. Dans ce cas les surfaces sont dites linéairement conjuguées. Le mécanisme est hyperstatique. L'étude approfondie de la capacité de charge à la rupture et à la pression superficielle nécessite l'introduction d'une loi de comportement locale et la connaissance des défauts.

Les efforts appliqués entraînent des déformations locales des surfaces dues à la pression de contact et des déformations de la structure, le contact devient surfacique.

La capacité de charge est évaluée en prenant en compte l'ensemble de ces données. Voir l'ouvrage "CALCUL DE LA CAPACITÉ DE CHARGE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES" selon l'ISO 6336".

## II Recherche des surfaces axoïdes et classification des engrenages

Soit  $R_0$  un repère par rapport auquel deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en rotation autour de deux axes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , fixes dans  $R_0$  et distincts, voir figure I.1

On pose :  $\overline{\Omega(S_1/R_0)} = \omega_{10} \cdot \overline{x_1}$  ;  $\overline{\Omega(S_2/R_0)} = \omega_{20} \cdot \overline{x_2}$

$\overline{x_1}$  et  $\overline{x_2}$  sont les vecteurs unitaires liés aux axes de rotation  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

### II.1 Premier Problème

Déterminer  $\Delta_{12}$ , axe central du torseur distributeur des vitesses de  $S_2$  dans son mouvement par rapport à  $S_1$ .

Soit  $(H_1H_2)$  la perpendiculaire commune à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

$H_1$  et  $H_2$  sont uniques, Notons  $\overline{H_1H_2} = a \cdot \overline{z}$

Les éléments de réduction du torseur distributeur des vitesses de  $S_2/S_1$  sont caractérisés en un point  $M$  quelconque par

$$\{C_{21}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega(S_2/S_1)} \\ \overline{V(M \in S_2/S_1)} \end{array} \right\}_M$$

avec :

$$\overline{\Omega(S_2/S_1)} = \overline{\Omega(S_2/S_0)} - \overline{\Omega(S_1/S_0)} = \omega_{20} \cdot \overline{x_2} - \omega_{10} \cdot \overline{x_1}$$

et  $\overline{V(M \in S_2/S_1)} = \overline{V(M \in S_2/S_0)} - \overline{V(M \in S_1/S_0)}$

$$\overline{V(M \in S_2/S_0)} = \overline{V(H_2 \in S_2/S_0)} + \overline{\Omega(S_2/S_0)} \wedge \overline{H_2M}$$

$$\overline{V(M \in S_1/S_0)} = \overline{V(H_1 \in S_1/S_0)} + \overline{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \overline{H_1M}$$

$$\{C_{21}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{20} \cdot \overline{x_2} - \omega_{10} \cdot \overline{x_1} \\ \omega_{20} \cdot \overline{x_2} \wedge \overline{H_2M} - \omega_{10} \cdot \overline{x_1} \wedge \overline{H_1M} \end{array} \right\}_M$$

$$\text{en particulier : } \{C_{21}\}_{H_1} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{20} \cdot \overline{x_2} - \omega_{10} \cdot \overline{x_1} \\ \overline{V(H_1 \in S_2/S_1)} = \omega_{20} \cdot \overline{x_2} \wedge \overline{H_2H_1} \end{array} \right\}_{H_1} \quad (\text{I})$$

Recherche de l'axe central  $\Delta_{12}$ : par définition, c'est l'ensemble des points  $M$  tels que :

$$\overline{\Omega(S_2/S_1)} \wedge \overline{V(M \in S_2/S_1)} = \vec{0}$$

Avec les données en  $H_1$  nous obtenons :

$$\overline{\Omega(S_2/S_1)} \wedge \left[ \overline{V(H_1 \in S_2/S_1)} + \overline{\Omega(S_2/S_1)} \wedge \overline{H_1M} \right] = \vec{0}$$

$$\overline{\Omega(S_2/S_1)} \wedge \overline{V(H_1 \in S_2/S_1)} + \overline{\Omega(S_2/S_1)} \wedge \left[ \overline{\Omega(S_2/S_1)} \wedge \overline{H_1M} \right] = \vec{0}$$

$$\overline{\Omega(S_2/S_1)} \wedge \overline{V(H_1 \in S_2/S_1)} + \left[ \overline{\Omega(S_2/S_1)} \cdot \overline{H_1M} \right] \cdot \overline{\Omega(S_2/S_1)} - \left[ \overline{\Omega(S_2/S_1)} \right]^2 \cdot \overline{H_1M} = \vec{0}$$

$$\overline{H_1M} = \frac{\overline{\Omega(S_2/S_1)} \wedge \overline{V(H_1 \in S_2/S_1)}}{\left[ \overline{\Omega(S_2/S_1)} \right]^2} + \lambda \cdot \overline{\Omega(S_2/S_1)} \quad (\text{II}) ; \quad \text{avec } \lambda = \frac{\overline{\Omega(S_2/S_1)} \cdot \overline{H_1M}}{\left[ \overline{\Omega(S_2/S_1)} \right]^2}$$

En tenant compte de l'expression (I)

$$\overline{H_1M} = \frac{\left[ \overline{\Omega(S_2/S_1)} \cdot \overline{H_2H_1} \right] \omega_{20} \cdot \overline{x_2} - \left[ \overline{\Omega(S_2/S_1)} \cdot \omega_{20} \cdot \overline{x_2} \right] \cdot \overline{H_2H_1}}{\left[ \overline{\Omega(S_2/S_1)} \right]^2} + \lambda \cdot \overline{\Omega(S_2/S_1)}$$

$$\overline{H_1M} = \left[ \frac{\overline{\Omega(S_2/S_1)} \cdot \omega_{20} \cdot \overline{x_2}}{\left[ \overline{\Omega(S_2/S_1)} \right]^2} \right] \cdot \overline{H_1H_2} + \lambda \cdot \overline{\Omega(S_2/S_1)}$$

Conclusion : A chaque instant, l'axe central  $\Delta_{12}$  du torseur distributeur des vitesses  $\{C_{21}\}$  est une droite parallèle à  $\overline{\Omega(S_2/S_1)}$  qui coupe la perpendiculaire commune  $H_1H_2$  en un point C tel que :

$$\overline{H_1C} = \left[ \frac{\overline{\Omega(S_2/S_1)} \cdot \omega_{20} \cdot \overline{x_2}}{\left[ \overline{\Omega(S_2/S_1)} \right]^2} \right] \cdot \overline{H_1H_2}$$

## II.2 Deuxième problème

Quelle est la nature des surfaces axoïdes (ou primitives) de l'engrenage S1-S2 quand on impose  $\omega_{20}/\omega_{10} = i = C^{te}$  ?

### II.2.1 Les axes $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont quelconques.

Posons :  $\overline{\Omega(S_2/S_1)} = \omega_{21} \cdot \overline{x}$  ;  $\omega_{20} = i \omega_{10}$

Ici  $\overline{x}$  est un vecteur unitaire constant car :  $\overline{\Omega(S_2/S_1)} = \overline{\Omega(S_2/S_0)} - \overline{\Omega(S_1/S_0)}$

$$\overline{\Omega(S_2/S_1)} = \omega_{20} \cdot \overline{x_2} - \omega_{10} \cdot \overline{x_1}$$

$$\overline{\Omega(S_2/S_1)} = \omega_{10} \cdot \left[ \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \cdot \overline{x_2} - \overline{x_1} \right] = \omega_{10} \cdot [i \cdot \overline{x_2} - \overline{x_1}]$$

$[i \cdot \overline{x_2} - \overline{x_1}]$  est un vecteur constant non unitaire. Sa norme est égale à :  $\sqrt{1+i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}$

$$\overline{\Omega(S_2/S_1)} = \omega_{21} \cdot \overline{x}, \text{ avec : } \overline{x} = \frac{1}{\sqrt{1+i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}} \cdot (i \cdot \overline{x_2} - \overline{x_1})$$

$$\omega_{21} = \overline{\Omega(S_2/S_1)} \cdot \overline{x} = \omega_{20} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x} - \omega_{10} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x}$$

$$\cos \delta_1 = \overline{x_1} \cdot \overline{x} = \frac{i \cdot \cos \Sigma - 1}{\sqrt{1+i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}} \quad \text{et} \quad \cos \delta_2 = \overline{x_2} \cdot \overline{x} = \frac{i - \cos \Sigma}{\sqrt{1+i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}}$$

$$\omega_{21} = \omega_{20} \cdot \cos \delta_2 - \omega_{10} \cdot \cos \delta_1 = \omega_{10} \cdot [i \cdot \cos \delta_2 - \cos \delta_1]$$

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{21}} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \cdot \frac{\omega_{10}}{\omega_{21}} = \frac{i}{i \cdot \cos \delta_2 - \cos \delta_1}$$

D'où la définition géométrique de l'axe central  $\Delta_{12}$  :

$$\overline{H_1M} = \left[ \frac{i \cdot \cos \delta_2}{i \cdot \cos \delta_2 - \cos \delta_1} \right] \cdot \overline{z} + \lambda \cdot \overline{x}$$

Conclusion 1 : L'axe central  $\Delta_{12}$  est une droite fixe dans  $S_0$ .

Conclusion 2 : La surface axoïde liée à  $S_i$  étant définie par l'ensemble des droites  $\Delta_{12}$  au cours du temps, c'est donc un hyperboloïde de révolution d'axe  $\Delta_i$ .

Le cercle de gorge ayant pour centre  $H_i$ , Les rayons de gorge sont définis par :

$$\overline{H_1C} = \frac{a \cdot i \cdot \cos \delta_2}{i \cdot \cos \delta_2 - \cos \delta_1} \cdot \vec{z} \quad \text{et} \quad \overline{H_2C} = \frac{a \cdot \cos \delta_1}{i \cdot \cos \delta_2 - \cos \delta_1} \cdot \vec{z}$$

Les surfaces primitives de l'engrenage ( $S_1$ – $S_2$ ) sont des hyperboloïdes de révolution, qui restent tangentes à tout instant le long de  $\Delta_{12}$ , mais le glissement n'est pas nul.

**C'est la famille des engrenages gauches.**

Expression de la vitesse de glissement en tout point  $M$  de l'axe central  $\Delta_{21}$ , en fonction :

- de l'angle  $\Sigma$  entre les axes  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  ;
- du rapport cinématique  $i$  ;
- de l'entraxe  $a$  ;
- de la vitesse de rotation  $\omega_{10}$ .

$$\overline{V(M \in S_2 / S_1)} = \overline{V(C \in S_2 / S_1)} = \overline{V(M \in S_2 / S_0)} - \overline{V(M \in S_1 / S_0)}$$

$$\overline{V(C \in S_2 / S_1)} = \omega_{20} \cdot \vec{x}_2 \wedge \overline{H_2M} - \omega_{10} \cdot \vec{x}_1 \wedge \overline{H_1M}$$

Calculs auxiliaires :

$$\begin{aligned} \overline{H_1C} &= \left[ \frac{\overline{\Omega(S_2 / S_1)} \cdot \omega_{20} \cdot \vec{x}_2}{(\overline{\Omega(S_2 / S_1)})^2} \right] \cdot \overline{H_1H_2} \\ &= \left[ \frac{(\omega_{20} \cdot \vec{x}_2 - \omega_{10} \cdot \vec{x}_1) \cdot \omega_{20} \cdot \vec{x}_2}{(\omega_{20} \cdot \vec{x}_2 - \omega_{10} \cdot \vec{x}_1)^2} \right] \cdot a \cdot \vec{z} \\ &= \left[ \frac{(i \omega_{10} \cdot \vec{x}_2 - \omega_{10} \cdot \vec{x}_1) \cdot i \omega_{10} \cdot \vec{x}_2}{(i \omega_{10} \cdot \vec{x}_2 - \omega_{10} \cdot \vec{x}_1)^2} \right] \cdot a \cdot \vec{z} = \left[ \frac{(i \cdot \vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot i \cdot \vec{x}_2}{(i \cdot \vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2} \right] \cdot a \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

$$\overline{H_1C} = \frac{i \cdot (i - \cos \Sigma)}{1 + i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma} \cdot a \cdot \vec{z}$$

$$\vec{x} = \frac{(i \vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{\sqrt{1 + i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}} \quad \cos \delta_1 = \frac{i \cdot \cos \Sigma - 1}{\sqrt{1 + i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}} \quad \cos \delta_2 = \frac{i - \cos \Sigma}{\sqrt{1 + i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}}$$

$$\omega_{21} = \omega_{10} \cdot (i \cdot \cos \delta_2 - \cos \delta_1)$$

$$= \omega_{10} \cdot \left( \frac{i \cdot (i - \cos \Sigma)}{\sqrt{1 + i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}} - \frac{i \cdot \cos \Sigma - 1}{\sqrt{1 + i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}} \right)$$

$$= \omega_{10} \cdot \left( \frac{1 + i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}{\sqrt{1 + i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}} \right)$$

$$\omega_{21} = \omega_{10} \cdot \sqrt{1 + i^2 - 2i \cdot \cos \Sigma}$$

$$\overline{H_2C} = -a \cdot \vec{z} + \overline{H_1C}$$

Expression de la vitesse de glissement en C appartenant à l'axe central  $\Delta_{21}$  :

$$\begin{aligned}
 V_{gC} &= \overline{V(C \in S_2 / S_1)} = \overline{V(C \in S_2 / S_1)} \cdot \vec{x} \\
 \overline{V(C \in S_2 / S_1)} \cdot \vec{x} &= \left[ \overline{V(C \in S_2 / S_0)} - \overline{V(C \in S_1 / S_0)} \right] \cdot \vec{x} \\
 V_{gC} &= \left[ \omega_{20} \cdot \vec{x}_2 \wedge \overline{H_2 C} - \omega_{10} \cdot \vec{x}_1 \wedge \overline{H_1 C} \right] \cdot \vec{x} \\
 V_{gC} &= \left[ i \omega_{10} \cdot \vec{x}_2 \wedge \left[ \frac{-1 + i \cos \Sigma}{1 + i^2 - 2i \cos \Sigma} \right] \cdot a \cdot \vec{z} - \omega_{10} \cdot \vec{x}_1 \wedge \left[ \frac{i(i - \cos \Sigma)}{1 + i^2 - 2i \cos \Sigma} \right] \cdot a \cdot \vec{z} \right] \cdot \vec{x} \\
 V_{gC} &= \omega_{10} \cdot a \cdot \left[ i \vec{x} \wedge \left[ \frac{-1 + i \cos \Sigma}{1 + i^2 - 2i \cos \Sigma} \right] \cdot \vec{x}_2 - \vec{x} \wedge \left[ \frac{i(i - \cos \Sigma)}{1 + i^2 - 2i \cos \Sigma} \right] \cdot \vec{x}_1 \right] \cdot \vec{z} \\
 V_{gC} &= \omega_{10} \cdot a \cdot \left[ \frac{i(-1 + i \cos \Sigma)}{(1 + i^2 - 2i \cos \Sigma)} \cdot \frac{(i \vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{\sqrt{1 + i^2 - 2i \cos \Sigma}} \wedge \vec{x}_2 - \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \vec{x} \wedge \left[ \frac{i(i - \cos \Sigma)}{(1 + i^2 - 2i \cos \Sigma)} \cdot \frac{(i \vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{\sqrt{1 + i^2 - 2i \cos \Sigma}} \right] \wedge \vec{x}_1 \right] \cdot \vec{z} \\
 V_{gC} &= \omega_{10} \cdot a \cdot \left[ \frac{-i(-1 + i \cos \Sigma) \cdot \sin \Sigma}{(1 + i^2 - 2i \cos \Sigma)^{3/2}} + \frac{i(i - \cos \Sigma) \cdot \sin \Sigma}{(1 + i^2 - 2i \cos \Sigma)^{3/2}} \right] \\
 V_{gC} &= \omega_{10} \cdot a \cdot \left[ \frac{i - i^2 \cos \Sigma + i^2 - i \cos \Sigma}{(1 + i^2 - 2i \cos \Sigma)^{3/2}} \right] \cdot \sin \Sigma
 \end{aligned}$$

La vitesse de tous les points M appartenant à l'axe central  $\Delta_{21}$  est minimale et est égale à :

$$\boxed{V_{gC} = \frac{\omega_{10} \cdot a \cdot i \cdot (1 + i) \cdot (1 - \cos \Sigma) \cdot \sin \Sigma}{(1 + i^2 - 2i \cos \Sigma)^{3/2}}} \quad \text{(III)}$$

La figure II.1 illustre de telles surfaces axoïdes dans le cas où  $\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$