Logique

Certaines notions de logique sont utilisées intuitivement dès les premiers apprentissages en mathématiques. Cette discipline n'est toutefois spécifiquement étudiée que dans le supérieur.
L'objet de cette fiche est de travailler les règles de logique qui servent dans les démonstrations, ainsi que de se familiariser avec le langage formel, omniprésent par la suite.

Une **assertion** est une affirmation à laquelle on peut attacher une valeur de vérité : soit vraie soit fausse.

Je vous montre comment

■ Démontrer qu'une propriété dépendant de plusieurs assertions est vraie

▸ À l'aide d'une table de vérité :

On envisage tous les cas pour les assertions (vraie ou fausse !), et on utilise les règles sur les opérateurs logiques.

Les **opérateurs logiques** permettent de combiner des assertions pour en obtenir de nouvelles :

- *Négation* : la négation d'une propriété P est notée $\rceil P$
- *Conjonction* : ' et ' notée $\wedge$
- *Disjonction inclusive* : ' ou ' notée $\vee$
- *Implication* : notée $\Rightarrow$
- *Équivalence* : notée $\Leftrightarrow$

…/…

…/…

Ils sont définis par la table de vérité :

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Selon le **principe de non contradiction**, $\left(P \wedge \neg P\right)$ est une assertion toujours fausse ; selon le **principe du tiers exclu**, $\left(P \vee \neg P\right)$ est une assertion toujours vraie (appelée **tautologie**).

Exemple 1

P et Q désignent deux assertions. Montrer que : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\neg Q \Rightarrow \neg P\right)$.

Réponse

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

On voit que les assertions $(P \Rightarrow Q)$ et $\left(\neg Q \Rightarrow \neg P\right)$ sont simultanément vraies et simultanément fausses. Elles sont donc bien équivalentes.

Remarque : On dit que l'assertion $\left(\neg Q \Rightarrow \neg P\right)$ est la **contraposée** de l'assertion $(P \Rightarrow Q)$.

- En utilisant les **lois de Morgan** :

1. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \left(\neg P \vee \neg Q\right)$
2. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \left(\neg P \wedge \neg Q\right)$
3. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
4. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Exemple 2

P et Q désignent deux assertions. Montrer que l'on a : $\left(\left(P \wedge \neg Q\right) \vee (P \wedge Q)\right) \Leftrightarrow P$.

Remarque : Parfois, comme ici, un résultat a l'air « évident ». Bien sûr, quand on demande de démontrer un résultat de logique, on attend une argumentation basée sur les théorèmes du cours, pas la réponse : « c'est logique » !

Réponse

$$\Big(\big(P\wedge \neg Q\big)\vee\big(P\wedge Q\big)\Big)\underbrace{\Leftrightarrow}_{3^e\text{ loi de Morgan}}\left(P\wedge \underbrace{\big(Q\vee \neg Q\big)}_{\text{assertion toujours vraie}}\right)\Leftrightarrow P$$

■ Nier une phrase quantifiée

Concernant des éléments d'un ensemble, on définit trois opérateurs, appelés **quantificateurs** :

- $\forall$: se lit *« quel que soit »* ou *« pour tout »*.
- $\exists$: se lit *« il existe au moins un »*.
- $\exists\,!$: se lit *« il existe un unique »*.
- Si P désigne une propriété dépendant des éléments x d'un ensemble E, alors :
- $(\forall x\in E, P)$ signifie « *la propriété P est vérifiée pour tous les éléments de E* ».
- $(\exists x\in E, P)$ signifie « *la propriété P est vérifiée au moins pour un élément de E* ».
- $(\exists ! x\in E, P)$ signifie « *la propriété P est vérifiée pour un seul élément de E* ».

⚠ On peut permuter deux quantificateurs identiques, mais on ne peut pas permuter deux quantificateurs de nature différente.

Par exemple : $\left(\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}, y=x^2\right)$ est une assertion vraie (tout réel a un carré), par contre $\left(\exists y\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, y=x^2\right)$ est une assertion fausse (tous les carrés de réels ne sont pas égaux).

▶ En utilisant les résultats suivants :

Si P désigne une propriété dépendant d'un élément x d'un ensemble E, alors :

- $\neg(\forall x\in E, P)\Leftrightarrow(\exists x\in E, \neg P)$
- $\neg(\exists x\in E, P)\Leftrightarrow(\forall x\in E, \neg P)$

Exemple 3

Nier l'assertion : $(\forall x\in E, \exists y\in E, x.y=1)$.

Remarque : Cette assertion est fausse pour $E=\mathbb{R}$, et vraie pour $E=\mathbb{R}^*$, mais ce n'est pas la question !

Réponse

$\neg(\forall x\in E, \exists y\in E, x.y=1)\Leftrightarrow\big(\exists x\in E, \neg(\exists y\in E, x.y=1)\big)\Leftrightarrow(\exists x\in E, \forall y\in E, x.y\neq 1)$.

■ Nier une implication

- En utilisant l'assertion : $\boxed{\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)}$

Exemple 4

Nier l'assertion : $(\forall\, x \in E, (x \in A \Rightarrow x \notin B))$.

Réponse

$$\neg(\forall\, x \in E, (x \in A \Rightarrow x \notin B)) \Leftrightarrow (\exists\, x \in E, \neg(x \in A \Rightarrow x \notin B))$$
$$\Leftrightarrow (\exists\, x \in E, (x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow (\exists\, x \in E, x \in A \cap B).$$

Remarque : On a aussi : $(\exists\, x \in E, x \in A \cap B) \Leftrightarrow (A \cap B \neq \varnothing)$.

■ Traduire simplement une phrase quantifiée

Pour bien comprendre une phrase quantifiée, il ne suffit pas de la traduire littéralement, mais il faut être capable de l'exprimer simplement « en français ».

Exemple 5

Écrire littéralement l'assertion suivante, puis la traduire par une phrase concise : $(\forall x \in A, x \neq 0)$.

Réponse

L'expression littérale de cette phrase quantifiée est : « quel que soit *x* élément de *A*, *x* n'est pas nul ».

On peut la traduire simplement en disant : « *A* ne contient pas 0 ».

Remarque : Il existe bien sûr d'autres formulations, comme « 0 n'est pas un élément de *A* », ou « aucun des éléments de *A* n'est nul »… L'essentiel est de comprendre le sens de l'assertion, en se détachant du vocabulaire formel.

On s'échauffe

Dans les exercices, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. P, Q et R désignent des assertions. Montrer que les équivalences suivantes sont vraies :

a. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ (à l'aide d'une table de vérité)

b. $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ (à l'aide d'une table de vérité)

c. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R)$ (à l'aide d'une table de vérité)

d. $(P \wedge \neg(Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

e. $((P \wedge \neg Q) \wedge \neg(R \wedge \neg Q)) \Leftrightarrow (P \wedge \neg(Q \vee R))$

2. Traduire les assertions suivantes à l'aide d'une phrase concise (comme dans **l'exemple 5**) :

a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

c. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

d. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$.

e. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$.

3. Traduire à l'aide de phrases quantifiées les assertions suivantes :

a. f ne prend que des valeurs entières.

b. f prend toutes les valeurs entières.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d. f est strictement décroissante.

e. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

4. Donner la négation des assertions suivantes :

a. $\exists a > 0, \exists b \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, na \leq b$.

b. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a > 0, b \geq 0) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, na > b)$.

c. $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in [0;1], f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

d. $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, (x.y=x)\Rightarrow (y=1)$.

e. $\left(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)\times f(y)\right)\Rightarrow (\forall x\in \mathbb{R}, f(x)\geq 0)$.

5. Parce que l'on peut s'amuser avec la logique :
On considère la tautologie (assertion toujours vraie) *A* suivante : « Quand je suis en cours, mon téléphone portable est éteint ».

On note *C* l'assertion « je suis en cours », et *P* l'assertion « mon téléphone portable est allumé ».

a. Donner un équivalent de *A* à l'aide de *C*, *P* et des opérateurs logiques.

b. On considère l'assertion *S* : « Mon téléphone portable sonne ». Si *S* est vraie, écrire des assertions vraies à l'aide de *P* et *C* (hormis les tautologies $P\vee \urcorner P$ et $C\vee \urcorner C$).

c. Exprimer à l'aide de *P* et *C* une assertion qui illustre : « Je suis mis à la porte, car mon téléphone a sonné ». Que peut-on en penser ?

d. Donner la contraposée de l'assertion *A*.

e. Donner la réciproque de l'assertion *A*.

On accélère

6. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

b. La fonction *f* n'est pas strictement décroissante.

c. La fonction *f* n'est pas de signe constant.

d. La fonction *f* n'admet pas d'extremum.

e. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

7. Après en avoir donné la signification, donner la négation des assertions suivantes :

a. $\exists M\in \mathbb{R}, \forall n\in \mathbb{N}, u_n\geq M$.

b. $\exists N\in \mathbb{N}, \forall n\in \mathbb{N}, (n\geq N)\Rightarrow (u_n>0)$.

c. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq a) \Rightarrow \left(f(x)f(a) > 0\right)$.

d. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left(f(x) = f(y)\right) \Rightarrow (x = y)$.

e. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow \left(|u_n| < \varepsilon\right)$.

On finit au top

8. Après en avoir donné la signification, donner la négation des assertions suivantes :

a. $\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq A) \Rightarrow \left(|f(x) - L| < \varepsilon\right)$.

b. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \left(|x - a| < r\right) \Rightarrow \left(|f(x) - f(a)| < \varepsilon\right)$.

9. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

b. La fonction *f* n'est pas monotone.

c. Les fonctions *f* et *g* s'annulent simultanément.

d. Les fonctions *f* et *g* ont les mêmes variations.

10. Soient *E* un ensemble, *A* et *B* deux assertions dépendant des éléments *x* de E. Compléter par le symbole $\Rightarrow$, ou $\Leftarrow$ et justifier qu'il n'y a pas d'équivalence :

a. $(\exists x \in E, A \wedge B) \cdots \left((\exists x \in E, A) \wedge (\exists x \in E, B)\right)$

b. $(\forall x \in E, A \vee B) \cdots \left((\forall x \in E, A) \vee (\forall x \in E, A)\right)$

1. a.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	*V*	F	*V*
V	F	*F*	F	*F*
F	V	*V*	V	*V*
F	F	*V*	V	*V*

b.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$
V	V	V	*F*	F	*F*
V	F	F	*V*	V	*V*
F	V	V	*F*	F	*F*
F	F	V	*F*	V	*F*

c. L'assertion $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ est vraie si, et seulement si *P*, *Q* et *R* sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$R \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*

d. $$\big(P \wedge \neg(Q \vee R)\big) \underbrace{\Leftrightarrow}_{2^e \text{ loi de Morgan}} \big(P \wedge (\neg Q \wedge \neg R)\big) \Leftrightarrow \big(P \wedge \neg Q \wedge \neg R\big).$$

e. $$\Big(\big(P \wedge \neg Q\big) \wedge \neg\big(R \wedge \neg Q\big)\Big) \underbrace{\Leftrightarrow}_{1^{re} \text{ loi de Morgan}} \Big(\big(P \wedge \neg Q\big) \wedge \big(\neg R \vee Q\big)\Big)$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{3^e \text{ loi de Morgan}} \left(\big(P \wedge \neg Q \wedge \neg R\big) \vee \underbrace{\big(P \wedge \neg Q \wedge Q\big)}_{\text{assertion fausse}}\right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{2^e \text{ loi de Morgan}} \big(P \wedge \neg(Q \vee R)\big).$$

2. a. La fonction *f* est nulle. (Cela sous-entend « partout ».)

b. La fonction *f* ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.