

Présentation de la collection

“Mathématiques à l’Université”

Depuis 1997, cette collection se propose de mettre à la disposition des étudiants de troisième, quatrième et cinquième années d’études supérieures en mathématiques des ouvrages couvrant l’essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l’Agrégation, ainsi qu’aux élèves des grandes écoles et aux ingénieurs désirant actualiser leurs connaissances.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte, en général, un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels, des énoncés d’exercices ou de problèmes.

Nous sommes heureux d’accueillir dans cette collection le livre de Monsieur El Amrani. Le sujet dont il traite, l’analyse de Fourier, est d’une très grande importance tant pour les mathématiques pures que pour leurs applications les plus diverses : sciences physiques (notamment optique et mécanique quantique), probabilités, télécommunications et traitement du signal, traitement d’images, Les propriétés de la transformation de Fourier classique dans divers espaces fonctionnels sont très clairement exposées. Les différents types de convergence des séries de Fourier sont définis et étudiés avec beaucoup de soin. Les transformations apparentées ne sont pas oubliées : une assez longue annexe présente l’essentiel de ce qui concerne la transformation de Fourier discrète, la transformation de Fourier sur un groupe abélien fini, les transformations de Laplace, Mellin et Hankel. Une autre annexe rappelle, sans démonstration, les résultats essentiels concernant les théories de la mesure et de l’intégration.

L’ouvrage comporte un grand nombre d’exercices, certains disséminés dans le texte, d’autres regroupés dans un chapitre spécial. Tous sont corrigés. De plus, de nombreux exemples d’applications de l’analyse de Fourier à des domaines très variés, parfois inattendus, sont présentés. C’est donc un ouvrage particulièrement riche, qui rendra de grands services aux étudiants et aux enseignants.

Charles–Michel Marle

Philippe Pilibossian

Avant-propos

L'objectif principal de cet ouvrage est de regrouper, en un seul volume, un cours complet accompagné d'exercices de compréhension ainsi qu'un chapitre entièrement consacré à un grand choix d'exercices et problèmes de révision et de synthèse. Nous avons, en outre, inséré deux annexes, la première offre des perspectives de prolongement et d'approfondissement, la seconde regroupe les rappels qui nous semblent utiles pour un accès efficace et rapide au contenu de l'ouvrage.

Si ce livre s'adresse aux étudiants de Master1 et aux candidats à l'agrégation, il est conçu de manière à être accessible, pour une large part, à un public scientifique généraliste de niveau bac+3, et peut être utilisé avec profit par les candidats au Capes ainsi que par les élèves d'Écoles d'ingénieurs souhaitant acquérir de bonnes bases en vue des nombreuses applications de l'analyse de Fourier, notamment en théorie du signal.

Pour le développement de ce travail nous adoptons le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous étudions en détail les espaces de Hilbert en mettant l'accent sur le théorème de projection et ses applications aux problèmes fondamentaux d'approximation. Nous établissons ensuite l'existence de bases hilbertiennes, et introduisons la notion de dimension hilbertienne qui nous fournit une condition nécessaire et suffisante pour que deux espaces de Hilbert soient isomorphes.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude approfondie du produit de convolution dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ et à ses principales propriétés et applications. Nous traitons en détail l'algèbre de Banach commutative $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ et nous y construisons les exemples fondamentaux d'unités approchées. Puis, en terme de suites régularisantes, nous établissons les principaux théorèmes d'approximation qui sont les résultats phares de cette partie du cours.

Le troisième chapitre est intimement lié au précédent. Il est dévolu à la transformation de Fourier dans les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$, ainsi que dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$. Les formules de dualité et d'inversion ainsi que les formules de dérivation offrent de nombreuses applications auxquelles nous consacrons une place considérable.

Le quatrième chapitre est dévolu aux séries de Fourier. Après des rappels détaillés sur les principaux modes de convergence, nous mettons en place les outils fondamentaux tels que les noyaux trigonométriques. Nous établissons ensuite les principaux théorèmes de convergence et proposons un large éventail d'applications.

Le cinquième chapitre offre un choix très varié d'exercices de révision et problèmes de synthèse. Le lecteur est invité ici à une étape décisive dans l'assimilation globale des divers concepts et techniques rencontrés tout au long de son cheminement.

La première partie de l'annexe A est une présentation assez détaillée de transformations fonctionnelles de type Fourier, très présentes en analyse. La seconde partie est une introduction élémentaire à l'analyse de Fourier sur les groupes finis ; le lecteur débutant y découvre notamment que la transformation de Fourier et les séries de Fourier possèdent des racines profondes dans la théorie des groupes.

Enfin, l'annexe B est consacrée aux rappels des notions de base et des résultats fondamentaux d'intégration qui interviennent tout au long de cet ouvrage.

S'il est banal de souligner que l'assimilation des mathématiques exige un investissement régulier de l'étudiant dans la résolution de nombreux exercices, il n'en demeure pas moins

vrai, qu'en analyse de Fourier, ce constat est d'une acuité toute particulière en raison de la confluence de nombreuses notions et techniques. Les exercices que nous proposons tout au long des quatre premiers chapitres sont, pour la plupart, des applications assez directes du cours et ont pour objectif d'attirer l'attention sur un point délicat d'un énoncé ou l'importance notable d'une nouvelle technique. Ceux du chapitre 5, souvent plus longs et plus délicats, mais rédigés de manière à orienter progressivement la réflexion du lecteur, sont destinés au travail d'approfondissement et de synthèse en vue des examens et des concours. Pour chaque exercice et problème de cet ouvrage, nous proposons d'abord des indications permettant de surmonter d'éventuelles difficultés, puis un corrigé détaillé que l'étudiant pourra comparer à sa propre solution. Nous avons systématiquement privilégié la solution méthodique et raisonnable, que peut découvrir l'étudiant lui-même, à l'éventuelle approche "astucieuse" voire "miraculeuse".

Cet ouvrage est issu d'un enseignement de plusieurs années en Master de mathématiques fondamentales et appliquées à l'Université d'Angers. La réaction des étudiants a été des plus encourageantes et j'ai évidemment bénéficié de nombre de leurs commentaires, qu'ils en soient tous ici vivement remerciés. En plus de mes propres notes de cours et fiches d'exercices élaborées au fil des années, je me suis très largement inspiré de la littérature existante ; le lecteur trouvera une bibliographie assez complète en fin du livre.

Il m'est très agréable de remercier mes amis et collègues qui m'ont aidé à l'accomplissement de ce travail. François Ducrot qui a relu attentivement plusieurs passages de ce livre, Jacquelin Charbonnel qui m'a prodigué ses conseils avisés, et Lucas Vienne qui a répondu aimablement à toutes mes questions tordues sur $\text{\LaTeX}$.

Je tiens aussi à remercier MM. Charles-Michel Marle et Philippe Pilibossian qui m'ont fait le plaisir d'accueillir cet ouvrage dans leur collection, ainsi que Madame Corinne Baud et les éditions Ellipses. Je voudrais exprimer toute ma gratitude à M. Charles-Michel Marle pour ses encouragements et ses précieux conseils.

Je dédie enfin ce livre à Karim, Mourad et Nessim, pour tout.

Angers, février 2008

Chapitre premier

Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert ou espaces hilbertiens occupent une place centrale en analyse fonctionnelle ainsi que dans les applications de l'analyse à la physique et aux sciences de l'ingénieur. En plus d'offrir une remarquable commodité de calcul, ces espaces généralisent $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$ munis de la distance euclidienne pour les aspects géométriques. La théorie a été initiée par David Hilbert dans son travail sur les formes quadratiques en une infinité de variables qu'il a appliqué à la théorie des équations intégrales.

Après une introduction aux espaces préhilbertiens, avec notamment des rappels sur les formes sesquilineaires et leurs propriétés basiques, nous étudions les espaces hilbertiens en portant une attention particulière au théorème de la projection orthogonale sur une partie convexe fermée. Ce résultat fondamental est la clé de toute la suite et nous en présentons de nombreux exemples d'applications. Nous montrons également que tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne et que deux espaces de Hilbert sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension hilbertienne.

1 Espaces préhilbertiens

1.1. Formes sesquilineaires

Les espaces vectoriels que nous considérons sont définis sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2. Définition On appelle application *anti-linéaire* ou *semi-linéaire* d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F , une application f vérifiant, pour tous x, y dans E et tout α dans $\mathbb{K}$,

$$\begin{cases} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) &= \bar{\alpha} f(x), \end{cases}$$

où $\bar{\alpha}$ désigne le conjugué du scalaire α .

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de dimension finie ou non.

1.3. Définition Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est dite *sesquilineaire* si elle est linéaire par rapport à la première variable et anti-linéaire par rapport à la deuxième :

- (a) pour y fixé, $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.
- (b) pour x fixé, $y \mapsto \varphi(x, y)$ est anti-linéaire.

Cela se traduit, pour tous x, y, z dans E et tout α dans $\mathbb{K}$, par les relations :

$$\begin{cases} \varphi(x+y, z) &= \varphi(x, z) + \varphi(y, z) \\ \varphi(x, y+z) &= \varphi(x, y) + \varphi(x, z) \\ \varphi(\alpha x, y) &= \alpha \varphi(x, y) \\ \varphi(x, \alpha y) &= \bar{\alpha} \varphi(x, y). \end{cases}$$

1.4. Définition Une forme sesquilinéaire φ sur $E \times E$ est dite *hermitienne* si on a

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}.$$

1.5. Remarque Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est simplement une forme bilinéaire ; une forme hermitienne est simplement une forme bilinéaire symétrique.

1.6. Proposition Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute forme sesquilinéaire φ sur $E \times E$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur la diagonale de $E \times E$, autrement dit par la connaissance de la fonction $x \mapsto \varphi(x, x)$, $x \in E$.

Démonstration : Découle de la relation :

$$4\varphi(x, y) = \varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy)$$

qu'on obtient en développant le second membre à l'aide de la sesquilinearité de φ . $\square$

1.7. Remarque Le résultat ci-dessus ne subsiste pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$, la forme bilinéaire $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ est nulle sur la diagonale, mais non identiquement nulle sur $E \times E$.

Exercice 1.1 Montrer qu'une forme sesquilinéaire φ sur un espace vectoriel complexe E est hermitienne si et seulement si $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$.

1.8. Produit scalaire

1.9. Définition Une forme sesquilinéaire hermitienne φ sur $E \times E$ est dite *positive* si,

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0.$$

1.10. Définition Une forme sesquilinéaire hermitienne φ sur $E \times E$ est dite *définie positive* (ou positive et *non dégénérée*) si elle est positive et si

$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0 (= 0_E).$$

On dit alors que φ est un *produit scalaire hermitien* sur E , ou plus simplement *produit scalaire* sur E .

Notations Si φ est un produit scalaire sur E , on écrira $\langle x, y \rangle_E$ (ou simplement $\langle x, y \rangle$) pour désigner l'élément $\varphi(x, y)$ de $\mathbb{K}$. On notera également $\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle_E}$.

1.11. Définition On appelle *espace préhilbertien* sur $\mathbb{K}$, tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note alors $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ou simplement E lorsqu'aucun risque de confusion n'est à craindre.

1.12. Remarque Un espace préhilbertien réel (resp. complexe) de dimension finie est appelé *espace euclidien* (resp. *espace hermitien*).

1.13. Définition Soit E un espace vectoriel réel. On appelle *complexifié* de E , l'espace vectoriel complexe $E_{\mathbb{C}}$ obtenu en munissant l'espace vectoriel réel $E \times E$ de la structure d'espace vectoriel complexe donnée, pour tous (f, g) et (u, v) dans $E \times E$, et tout $a + ib$ dans $\mathbb{C}$ (a, b réels), par

$$(f, g) + (u, v) \stackrel{\text{déf.}}{=} (f + u, g + v) \quad \text{et} \quad (a + ib)(f, g) \stackrel{\text{déf.}}{=} (af - bg, ag + bf).$$

Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ est un espace préhilbertien réel, on peut munir l'espace vectoriel $E_{\mathbb{C}}$ d'un produit scalaire

$$\langle (f, g), (u, v) \rangle_{E_{\mathbb{C}}} \stackrel{\text{déf.}}{=} \langle f, u \rangle_E + \langle g, v \rangle_E - i \langle f, v \rangle_E + i \langle g, u \rangle_E \quad (1.1)$$

qui lui confère une structure d'espace préhilbertien complexe appelé *le complexifié* de l'espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$. De la relation (1.1) on déduit que

$$\|(f, g)\|_{E_{\mathbb{C}}}^2 = \|f\|_E^2 + \|g\|_E^2. \quad (1.2)$$

1.14. Exemples fondamentaux

(1) L'espace vectoriel $\mathbb{K}^d$ muni de

$$(x, y) = ((x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d)) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i \overline{y_i}$$

est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$.

(2) L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx,$$

est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$.

(3) L'espace vectoriel $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ muni de

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} d\lambda_d(x),$$

est un espace préhilbertien complexe.

N.B. Pour les rappels et les notations concernant la théorie de la mesure et de l'intégration, le lecteur pourra consulter l'annexe B.

1.15. Remarque En remplaçant dans l'exemple (3) l'ensemble $\mathbb{R}^d$ par $\mathbb{N}$ et la mesure de Lebesgue λ_d par la mesure de dénombrement, on obtient l'espace $\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$ des *suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ de carré sommable* :

$$\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Muni de

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n},$$

$\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$ est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$, il joue un rôle considérable dans ce chapitre.

(4) Si $(E_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_1})$ et $(E_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_2})$ sont deux espaces préhilbertiens sur $\mathbb{K}$, alors le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $E_1 \times E_2$ muni de

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \langle x_1, y_1 \rangle_{E_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{E_2}$$

est un espace préhilbertien.

1.16. Norme associée à un produit scalaire

Rappelons que si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$, on note, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_E \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

et lorsqu'aucun risque de confusion n'est à craindre, on notera $\|x\|$ pour désigner $\|x\|_E$. Les deux inégalités fondamentales qui suivent interviendront tout au long de cet ouvrage.

1.17. Proposition Pour tous $x, y \in E$, on a

(1) l'inégalité de Schwarz¹ :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (1.3)$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires ;

(2) l'inégalité de Minkowski² (ou inégalité triangulaire) :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad (1.4)$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$, ou $y = 0$, ou $x = \lambda y$ pour un réel λ strictement positif.

Démonstration : (1) Pour tout scalaire λ fixé, on a

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \Re(\lambda \langle x, y \rangle) + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \geq 0. \quad (1.5)$$

Soit $\langle x, y \rangle = r e^{i\theta}$, $r = |\langle x, y \rangle|$. Posons $\lambda = t e^{-i\theta}$, t réel ; alors

$$f(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} a + 2bt + ct^2 = \langle x, x \rangle + 2t |\langle x, y \rangle| + t^2 \langle y, y \rangle \geq 0,$$

ce qui montre que f est un trinôme du deuxième degré à coefficients réels qui est toujours positif, donc il n'a pas deux racines réelles, et par suite $b^2 - ac \leq 0$, qui est précisément l'inégalité (1.3).

– Si x et y sont colinéaires, ou bien $y = 0$ ou bien $x = ky$, $k \in \mathbb{K}$; les deux membres de (1.3) sont alors égaux. Montrons que c'est le seul cas d'égalité. Supposons donc que $y \neq 0$ et que $x + \lambda y \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, le premier membre de (1.5) n'est jamais nul, donc $f(t)$ ne s'annule jamais pour t réel, d'où $b^2 - ac < 0$.

(2) On a

$$\Re \langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (1.6)$$

et comme

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \Re \langle x, y \rangle + \|y\|^2, \quad (1.7)$$

on déduit que

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$$

c'est-à-dire (1.4).

Examinons à présent les cas d'égalité. Si $x = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\|x + y\| = \|(1 + \lambda)x\| = (1 + \lambda) \|x\| = \|x\| + \|\lambda x\| = \|x\| + \|y\|.$$

¹SCHWARZ Hermann (1843-1921). Mathématicien allemand. Travailla sur les surfaces minimales, le calcul des variations et les fonctions analytiques.

²MINKOWSKI Hermann (1864-1909). Mathématicien russe. Travailla dans de multiples domaines, et fut en particulier le père fondateur de l'analyse convexe. On lui doit également les bases mathématiques de la théorie de la relativité. Il fut professeur de mathématiques d'Albert Einstein.

Réciproquement, de ce qui précède, on constate que si $\|x\| \neq 0$, $\|y\| \neq 0$ (ce qui équivaut à $x \neq 0$, $y \neq 0$), alors il y a égalité indiquée si et seulement si il y a égalité $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$; cela équivaut à avoir, au vu de la discussion du cas d'égalité précédent, que $x = \lambda y$ pour un nombre réel $\lambda > 0$. $\square$

1.18. Corollaire *L'application*

$$\begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|x\| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{cases}$$

définit une norme sur E . En d'autres termes, tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé.

Démonstration : Découle immédiatement de la proposition 1.17 et des propriétés définissant un produit scalaire. $\square$

1.19. Remarque L'inégalité de Schwarz reste vraie, avec la même démonstration, sur tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne positive, éventuellement dégénérée. Dans ce cas, l'application $x \mapsto \|x\|$ n'est plus une norme, elle est ce qu'on appelle une *semi-norme*.

N.B. Sauf mention expresse du contraire, on munit désormais tout espace préhilbertien de la topologie définie par la norme associée au produit scalaire.

1.20. Proposition (Relations remarquables dans un espace préhilbertien). Pour tous vecteurs x, y et z d'un $\mathbb{K}$ -espace préhilbertien E , on a

$$(1) \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \Re \langle x, y \rangle,$$

$$(2) \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

(3) l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad (1.8)$$

(4) les identités de polarisation :

$$4 \langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

$$4 \langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad (1.10)$$

(5) la formule de la médiane :

$$\|x-z\|^2 + \|x-y\|^2 = \frac{1}{2} \|y-z\|^2 + 2 \|m-x\|^2 \quad \text{avec } m = \frac{1}{2} (y+z). \quad (1.11)$$

Démonstration : Il s'agit de simples applications des définitions, nous indiquons la méthode et confions au lecteur le soin de détailler ces points élémentaires.

– Pour obtenir le point (1), il suffit de développer le second membre de l'égalité

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

à l'aide des propriétés basiques du produit scalaire.

– Le point (2) découle immédiatement de (1).

- La relation (1.8) s'obtient en développant le premier membre et en utilisant la relation donnée par (1).
- Chacune des relations (1.9) et (1.10) s'obtient en développant le second membre correspondant.
- Enfin, la relation (1.11) découle de (1.8) puisque

$$2(\|x - z\|^2 + \|x - y\|^2) = \|2x - (y + z)\|^2 + \|y - z\|^2 = 4\|x - m\|^2 + \|y - z\|^2.$$

D'où la proposition. $\square$

1.21. Définition Soit $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. On note $\ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que la série $\sum_{n \geq 0} |x_n|^p$ converge dans $\mathbb{K}$.

1.22. Proposition Muni des opérations usuelles, $\ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration : Il suffit de vérifier que $\ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N})$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. Soient $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ dans $\ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N})$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Il est clair que $\lambda x \stackrel{\text{déf.}}{=} (\lambda x_n)$ appartient à $\ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N})$, et de plus,

$$|x_n + y_n|^p \leq (|x_n| + |y_n|)^p \leq 2^{p-1}(|x_n|^p + |y_n|^p).$$

Le dernier membre de cette double inégalité est le terme général d'une série absolument convergente ; donc le premier aussi, et on a ainsi $(x_n + y_n) \in \ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N})$. $\square$

Compte tenu du corollaire 1.18, une question naturelle est de savoir si tout espace vectoriel normé est un espace préhilbertien. Plus précisément, est-il possible de définir dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in E$? En général la réponse est négative. Dans l'exercice qui suit, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour une réponse positive.

Exercice 1.2 (1) Montrer qu'une norme sur un espace vectoriel est issue d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

(2) En déduire que, pour $p \neq 2$, les espaces vectoriels $L_{\mathbb{K}}^p([0, 1], \lambda)$ et $\ell_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{N})$, munis de leur norme usuelle, ne sont pas préhilbertiens.

1.23. Remarque Dans $\mathbb{R}^2$, la norme donnée par

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x\| = \max(|x_1|, |x_2|)$$

n'est pas issue d'un produit scalaire. En effet, pour $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$, l'identité du parallélogramme donnerait

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = \|(1, 1)\|^2 - \|(1, -1)\|^2 = 0$$

d'où $\langle x, y \rangle = 0$, ce qui contredirait le point (2) de la proposition 1.20 puisque

$$\|x + y\|^2 = 1 \text{ et } \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2.$$

1.24. Proposition Pour tout vecteur u fixé dans un $\mathbb{K}$ -espace préhilbertien E , l'application

$$f_u : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle x, u \rangle \end{cases}$$

est une forme linéaire continue (i.e. élément du dual topologique E' de E). De plus,

$$\|f_u\|_{E'} = \|u\|.$$

Démonstration : Le résultat est évident si $u = 0$. Supposons maintenant $u \neq 0$. Par définition du produit scalaire, l'application f_u est linéaire, et de plus, comme

$$\|f_u\|_{E'} \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\|x\|=1} |f_u(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, u \rangle|,$$

on obtient, grâce à l'inégalité de Schwarz,

$$\|f_u\|_{E'} \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \cdot \|u\| = \|u\|,$$

c'est-à-dire $\|f_u\|_{E'} \leq \|u\|$. Or, $f_u\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\|$, d'où $\|f_u\|_{E'} \geq \|u\|$. $\square$

1.25. Remarque Dans un espace préhilbertien, la norme usuelle est définie à partir du produit scalaire. Réciproquement, l'identité de polarisation permet de retrouver le produit scalaire à partir de cette norme.

Par continuité de $x \mapsto \|x\|$, on déduit de cette remarque le résultat important suivant.

1.26. Corollaire Pour tout $\mathbb{K}$ -espace préhilbertien E , l'application

$$\begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto \langle x, y \rangle \end{cases}$$

est continue.

1.27. Définition Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ et $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ deux espaces préhilbertiens sur un même corps $\mathbb{K}$. On dit qu'une application $u : E \rightarrow F$ est un *homomorphisme* d'espaces préhilbertiens si elle est linéaire et vérifie

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E. \quad (1.12)$$

Si de plus u est bijective, on dit qu'il s'agit d'un *isomorphisme* d'espaces préhilbertiens.

1.28. Remarque Pour un tel isomorphisme u , on a évidemment $\|u(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, donc u est une *isométrie* de E . Réciproquement, l'identité de polarisation permet de voir aisément que tout homomorphisme d'espaces préhilbertiens qui est une isométrie surjective, est un isomorphisme.

Rappelons, au passage, qu'une *isométrie* entre espaces préhilbertiens est, par définition, une application linéaire qui conserve le produit scalaire ; elle est toujours injective mais pas nécessairement surjective !

Exercice 1.3 Soient E, F deux espaces préhilbertiens réels, et soit $f : E \rightarrow F$ une application telle que $f(0) = 0$ et $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 1.4 On note ici ℓ^2 l'espace préhilbertien $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}^*)$ muni de son produit scalaire usuel et de la norme associée. On considère

$$E = \left\{ (\alpha_n)_{n \geq 1} ; \alpha_n \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n^2}{n^2} < +\infty \right\}.$$