Chapitre 1

Suites réelles ou complexes

La notion de suite et de limite naquit avec *la méthode d'exhaustion*, technique utilisée par les mathématiciens grecs de l'Antiquité pour le calcul de longueur, d'aire et de volume. C'est ainsi qu'Archimède[1] approximait l'aire d'un cercle en y inscrivant une suite de polyèdres réguliers. La notion de limite est centrale en Analyse, elle est au cœur de la définition fondamentale de dérivée, d'intégrale et de série.
Ce chapitre traite une partie cruciale du programme de L1, c'est pourquoi nous l'avons rédigé de manière à être parfaitement accessible au lecteur débutant. Nous y avons détaillé un grand nombre d'exemples et évité tout formalisme inutile et tout emploi de quantificateurs.

1 Exemples de suites définies par récurrence

1.1. Introduction

1.2. Définition Soit E un ensemble non vide. On appelle **suite** à valeurs dans E, toute application $u : D \to E$ où D est une partie de $\mathbb{N}$. Lorsque E est une partie de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$), on dit que la suite est *réelle* (resp. *complexe*). Dans ces deux cas on parle de **suite numérique**.

[1] ARCHIMÈDE. Né à Syracuse en Sicile vers 287 av.J.-C., et mort à Syracuse en 212 av.J.-C.. Généralement considéré comme le plus grand mathématicien de l'Antiquité classique, il a notamment utilisé la méthode d'exhaustion pour calculer l'aire sous un arc de parabole à l'aide d'une somme de série, et a donné un encadrement de π d'une remarquable précision. Il fut également un physicien et un ingénieur de grande envergure.

1.3. Remarque Si u est une suite numérique, on devrait normalement noter $u(n)$ l'image de n par u. L'usage veut que l'on écrive u_n à la place de $u(n)$. On remarquera que u_n est simplement l'une des valeurs de la suite (on dit aussi un des termes de la suite, ou encore *le terme général* de la suite). La suite elle-même est la fonction u, mais on peut aussi écrire la suite complète sous la forme $(u_n)_{n\in D}$. Par exemple, lorsque $D = \mathbb{N}$, on notera la suite sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore $(u_n)_{n\geq 0}$. Lorsqu'aucun risque de confusion n'est à craindre sur D, on notera simplement (u_n) au lieu de $(u_n)_{n\in D}$.

Par commodité, nous supposerons souvent que les suites considérées sont définies à partir du rang $n = 0$. Si une suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang $p\,(p > 0)$, on se ramène au cas précédent en étudiant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+p}$.

Une suite peut être définie par la donnée d'une formule explicite :

$$u_n = f(n),$$

où f est une combinaison de symboles connus. Par exemple, si pour $n \geq 0$ on pose :

$$u_n = \sqrt{n^2+1}\,; \quad v_n = \frac{5n^3+n+1}{n^4+1}\,; \quad w_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n,$$

on obtient trois exemples de suites définies explicitement en fonction de l'entier n. Mais souvent une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de façon plus détournée, par la donnée de u_0 et d'une relation de récurrence

$$u_n = \varphi(u_{n-1}) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1,$$

où φ est une fonction explicitement connue, ce qui permet de calculer de proche en proche le terme u_n quand on connaît u_{n-1}. Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$u_0 = \frac{1}{2}, \ \text{et} \ u_n = 3\,u_{n-1}\,(1 - u_{n-1}) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1$$

a pour premiers termes :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \ u_1 = \frac{3}{4}, \ u_2 = \frac{9}{16}, \ u_3 = \frac{189}{256} \quad \text{etc.}$$

Nous allons maintenant étudier des exemples classiques importants de ce type de suites numériques.

1.4. Définition Soient a et r deux nombres réels ou complexes. On appelle **suite arithmétique** de premier terme a et de raison r, la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $u_n = u_{n-1} + r$ pour tout entier $n \geq 1$.

1.5. Proposition *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme a et de raison r. Alors,*

$$u_n = a + nr \tag{1.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Nous allons établir la formule (1.1) par récurrence sur n.
Cette formule est vraie pour $n = 0$ puisque $u_0 = a = a + 0 \times r$.
Supposons-la vraie à l'ordre n.
Montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$. En effet, on a $u_{n+1} = u_n + r$, et par hypothèse de récurrence on a $u_n = a+nr$, donc $u_{n+1} = a+nr+r$, c'est-à-dire $u_{n+1} = a + (n + 1)r$, ce qui prouve que la formule (1.1) est vraie à l'ordre $n + 1$.
On conclut que (1.1) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

1.6. Définition Soient a et r deux nombres réels ou complexes. On appelle **suite géométrique** de premier terme a et de raison r, la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $u_n = r\,u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

1.7. Exemple La suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $a = 0$ et de raison r n'est autre que la suite constante égale à 0. Autrement dit, $u_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. Montrons-le par récurrence. D'abord, c'est vrai pour $n = 0$ puisque $u_0 = a = 0$. Supposons que $u_n = 0$ pour un certain n, et montrons que $u_{n+1} = 0$. On a $u_{n+1} = r\,u_n$, et l'hypothèse de récurrence donne $u_n = 0$, donc $u_{n+1} = r \times 0 = 0$.
On conclut que $u_n = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
De la même manière, on montre qu'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme a et de raison $r = 0$ vérifie : $u_0 = a$ et $u_n = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1.8. Proposition *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme a et de raison non nulle r. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$u_n = a\,r^n. \tag{1.2}$$

Démonstration : Nous allons procéder par récurrence sur n.
La formule est vraie pour $n = 0$ puisque $u_0 = a = a\, r^0$ (car $r^0 = 1$).
Supposons-la vraie à l'ordre n, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a $u_{n+1} = r\, u_n$, et par hypothèse de récurrence : $u_n = a\, r^n$, donc $u_{n+1} = r\,(a\, r^n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} = a\, r^{n+1}$, ce qui prouve que la formule (1.2) est vraie à l'ordre $n+1$.
On conclut que la formule $u_n = a\, r^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Au paragraphe 1.15 nous étudierons également des suites définies par la donnée de leurs deux premiers termes u_0 et u_1 et d'une relation de récurrence dite d'ordre deux : $u_{n+1} = \psi(u_n, u_{n-1})$ où ψ est une combinaison de symboles connus.

1.9. Exemple Les nombres de Fibonacci[2] sont les termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définis par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 2.$$

Nous allons à présent décrire quelques exemples-type de suites réelles ou complexes définies par récurrence, et pour lesquelles on peut trouver une formule explicite $u_n = f(n)$; c'est néanmoins une circonstance qui reste exceptionnelle.

1.10. La formule de la progression arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme a et de raison r. On se propose d'établir la formule suivante donnant la somme des $n+1$ premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (a + k\, r) = (n+1)\, a + r\, \frac{n\,(n+1)}{2}. \tag{1.3}$$

D'après la proposition 1.5, on a $u_k = a + k\, r$ pour tout $k \geq 0$. La somme que nous recherchons va contenir $n+1$ fois le terme a, ce qui donne $(n+1)\, a$, et aussi r fois la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \ldots + n$. Cette dernière

[2]FIBONACCI Leonardo (1175 - 1250). Mathématicien italien. Connu de nos jours pour un problème conduisant aux nombres et à la suite qui portent son nom. À son époque, il fut célèbre surtout pour les applications qu'il donna de l'arithmétique au calcul commercial (calcul de profit, conversion entre monnaies ...). Ses travaux sont utilisés en Finance.

somme vaut $n\,(n+1)/2$, comme on peut le voir soit par une récurrence simple, soit en écrivant

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ \sum_{k=0}^{n} k &= n + (n-1) + \cdots + 2 + 1.\end{aligned}$$

En additionnant par colonne, chaque terme de la première ligne avec le terme correspondant de la seconde, on obtient en effet

$$\begin{aligned}2\sum_{k=0}^{n} k &= (1+n) + \big(2+(n-1)\big) + \cdots + \big((n-1)+2\big) + n+1 \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ termes}} \\ &= n\,(n+1).\end{aligned}$$

D'où la formule désirée.

1.11. La formule de la progression géométrique

Nous allons démontrer la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Pour cela, posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n, \tag{1.5}$$

où l'on a convenu que $a^0 = 1$. En multipliant S_n par a, on obtient

$$a\,S_n = a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n + a^{n+1}, \tag{1.6}$$

d'où, par différence de (1.5) et (1.6), $(1-a)\,S_n = 1 - a^{n+1}$, ce qui donne la formule désirée, lorsque $a \neq 1$.
Si $a = 1$, on a évidemment $S_n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1 \text{ termes}} = n+1$.

1.12. Exemple Soit a un nombre réel ou complexe différent de 1, et soient n et p deux nombres entiers vérifiant $0 \leq p \leq n$. On a

$$a^p + a^{p+1} + \cdots + a^{n-1} + a^n = a^p\,(1 + a + \cdots + a^{n-p-1} + a^{n-p}),$$

et comme $a \neq 1$, on a d'après (1.4),

$$1 + a + \cdots + a^{n-p} = \frac{1 - a^{n-p+1}}{1-a}.$$

D'où

$$a^p + a^{p+1} + \cdots + a^{n-1} + a^n = a^p \left(\frac{1 - a^{n-p+1}}{1-a}\right)$$

ou encore

$$a^p + a^{p+1} + \cdots + a^{n-1} + a^n = \frac{a^p - a^{n+1}}{1-a}.$$

1.13. Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de (1.4), évaluons la somme

$$A_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n}\,.$$

On a

$$A_n = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right). \tag{1.7}$$

Puisque $\frac{1}{10} \neq 1$, la formule (1.4) donne

$$1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

En remplaçant dans (1.7), on obtient

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

1.14. Récurrences linéaires d'ordre un

Soient $a \neq 0$ et b deux constantes complexes, et considérons la suite, dite **arithmético-géométrique**, définie par la donnée de u_0 et par la relation

$$u_n = a\,u_{n-1} + b \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Pour une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous allons expliciter le terme général u_n en fonction de u_0 et de n. En effet, on a

$$\begin{cases} u_n &= a\,u_{n-1} + b \\ u_{n-1} &= a\,u_{n-2} + b \\ u_{n-2} &= a\,u_{n-3} + b \\ \vdots & \\ u_3 &= a\,u_2 + b \\ u_2 &= a\,u_1 + b \\ u_1 &= a\,u_0 + b \end{cases}$$

Multiplions la deuxième relation par a, la troisième par a^2, ..., la k-ième par a^{k-1}, ..., l'avant-dernière par a^{n-2}, et la dernière par a^{n-1}. Puis additionnons. Après simplifications, on obtient

$$u_n \;=\; u_0\,a^n \;+\; b\Big(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}\Big),$$

et compte tenu de (1.4), on déduit que

$$u_n \;=\; \begin{cases} u_0\,a^n \;+\; b\,\dfrac{1-a^n}{1-a} & \text{si} \quad a \neq 1 \\ u_n \;=\; u_0 \;+\; nb & \text{si} \quad a = 1. \end{cases}$$

1.15. Récurrences linéaires d'ordre deux

Soient a et b deux constantes réelles ou complexes non nulles, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \geq 2$, on ait

$$u_n \;=\; a\,u_{n-1} \;+\; b\,u_{n-2}. \tag{1.8}$$

Chaque fois qu'on précise les *conditions initiales*, c'est-à-dire qu'on donne, de manière quelconque, les valeurs des deux premiers termes u_0 et u_1, la relation (1.8) fournit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une seule. Tant qu'on ne précise pas les conditions initiales, (1.8) admet une infinité de solutions. Cherchons s'il en existe du type particulier $u_n = r^n$, où r est une constante complexe non nulle. Pour que l'on ait pour tout $n \geq 2$,

$$r^n \;=\; a\,r^{n-1} \;+\; b\,r^{n-2},$$

il faut et il suffit que le nombre complexe r soit solution de **l'équation caractéristique** associée à (1.8) :

$$r^2 - a\,r - b \;=\; 0. \tag{1.9}$$

Premier cas : supposons que le discriminant a^2+4b de (1.9) soit non nul. Alors (1.9) admet deux racines distinctes r_1 et r_2, ce qui donne pour (1.8) deux solutions non proportionnelles :

$$u_n = r_1^n \quad \text{et} \quad u_n = r_2^n.$$

La relation (1.8) étant linéaire, il est clair que, pour tout couple de constantes complexes A et B, la suite

$$u_n = A\,r_1^n + B\,r_2^n \tag{1.10}$$

est encore solution de (1.8).
Supposons maintenant qu'on précise les conditions initiales u_0 et u_1 ; nous allons voir que ceci détermine complètement les constantes A et B, ce qui prouvera a posteriori que (1.10) est la solution "générale" de (1.8). En effet, si on fait $n = 0$, puis $n = 1$, dans (1.10), on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} A + B & = u_0 \\ r_1\,A + r_2\,B & = u_1 \end{cases}$$

d'où l'on déduit que

$$A = \frac{u_0\,r_2 - u_1}{r_2 - r_1} \quad \text{et} \quad B = \frac{u_1 - u_0\,r_1}{r_2 - r_1}.$$

On obtient ainsi une formule explicite pour u_n quand on connaît u_0 et u_1, à savoir

$$u_n = \frac{(u_0\,r_2 - u_1)\,r_1^n + (u_1 - u_0\,r_1)\,r_2^n}{r_2 - r_1}. \tag{1.11}$$

Noter que la suite (u_n) et celle de terme général donné par le second membre de (1.11) sont identiques car elles ont les mêmes deux premiers termes et vérifient toutes deux la même relation de récurrence d'ordre 2.
Second cas : supposons $a^2 + 4b = 0$. L'équation (1.9) admet une racine double $r = a/2$ qui fournit alors une seule solution de (1.8), à savoir $r^n = (a/2)^n$. Pour obtenir une autre solution, posons

$$u_n = r^n\,v_n = \left(\frac{a}{2}\right)^n v_n.$$

Un calcul facile montre que u_n vérifie (1.8) si et seulement si

$$v_n = 2\,v_{n-1} - v_{n-2}. \tag{1.12}$$