CHAPITRE I

LA NOTION D'ESPACE AFFINE

On se donne un espace vectoriel $\mathbb{E}$ sur le corps des réels $\mathbb{R}$. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{E}$ est muni d'une *addition* $M + M'$ qui en fait un *groupe abélien* c'est-à-dire cette addition vérifie :

- $\{M + N\} + L = M + \{N + L\}$ (*associativité*) ;
- $M + N = N + M$ (*commutativité*) ;
- il existe $O \in \mathbb{E}$ tel que $M + O = M$ (O est un *élément neutre*) ;
- pour tout $M \in \mathbb{E}$ il existe $-M \in \mathbb{E}$ (*opposé* de M) tel que $M + (-M) = O$.

L'ensemble $\mathbb{E}$ est aussi muni d'une multiplication (externe) par les nombres réels $(\lambda, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E} \longmapsto \lambda M \in \mathbb{E}$ vérifiant :

- $1 \cdot M = M$ pour tout $M \in \mathbb{E}$;
- $(\lambda\mu)M = \lambda(\mu M)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $M \in \mathbb{E}$;
- $(\lambda + \mu)M = \lambda M + \mu M$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $M \in \mathbb{E}$;
- $\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $M, N \in \mathbb{E}$.

Dans toute la suite, on gardera ce choix de noter les éléments de $\mathbb{E}$ par les lettres capitales $A, B, \cdots, M \cdots$.

1. Premières définitions

On appelle habituellement *vecteur* un élément d'un espace vectoriel. Mais on va reprendre une "définition ancienne" qui a l'avantage de montrer que cette notion a bien un sens du point de vue géométrique et physique ; elle consiste à interpréter un vecteur comme une "force" agissant sur des objets (les éléments de $\mathbb{E}$) dans une direction donnée, un sens donné et avec une certaine intensité !

1.1. Vecteurs "géométriques"

On dira que deux couples (M, N) et (M', N') d'éléments de $\mathbb{E}$ sont *équipollents* si on a la relation :

$$N - M = N' - M'.$$

On vérifie facilement que cette équipollence est une relation d'équivalence c'est-à-dire elle est *réflexive*, *symétrique* et *transitive*. La classe d'équipollence du couple (M, N) sera notée $\overrightarrow{MN}$ et appelée *vecteur géométrique* (mais dans toute la suite on dira simplement *vecteur*). Chaque classe d'équipollence contient un représentant *unique* de la forme (O, A) où O est l'élément neutre de $\mathbb{E}$ (*cf.* Fig.1). Sur l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ de ces classes d'équipollence on peut définir une addition et une multiplication par les scalaires de la façon suivante. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}' \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ représentés respectivement par (M, N) et (M', N') ; alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$ et $\lambda\overrightarrow{u}$ sont représentés respectivement par $(M + M', N + N')$ et $(\lambda M, \lambda N)$; il est facile de voir que cela ne dépend pas des choix des représentants et que cette addition et cette multiplication par les réels confèrent à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ une structure d'espace vectoriel réel de vecteur nul $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{MM}$ (M quelconque).

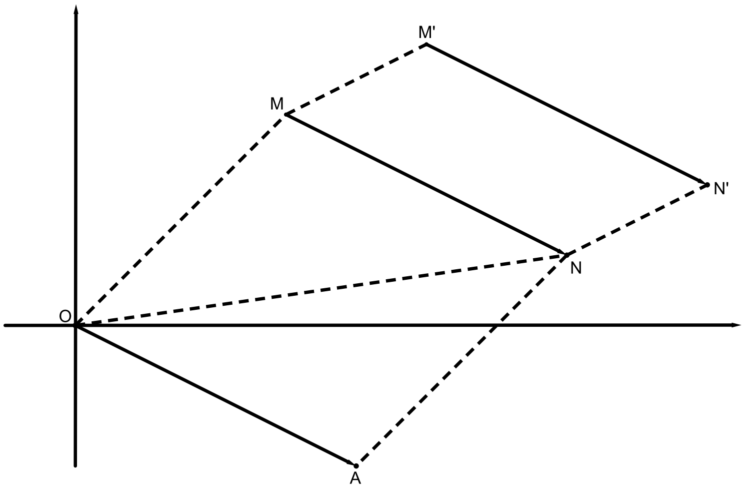

Fig. 1

En fait, on a défini une application $\Phi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{V}}$ qui à tout couple (M, N) associe le vecteur $\overrightarrow{MN}$. Cette application vérifie la relation suivante dite *relation de Chasles* (*) :

$$\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{MN} \tag{1}$$

et, pour tout élément $\omega \in \mathbb{E}$ fixé, l'application partielle $\Phi_\omega : M \in \mathbb{E} \longmapsto \overrightarrow{\omega M} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ est une bijection.

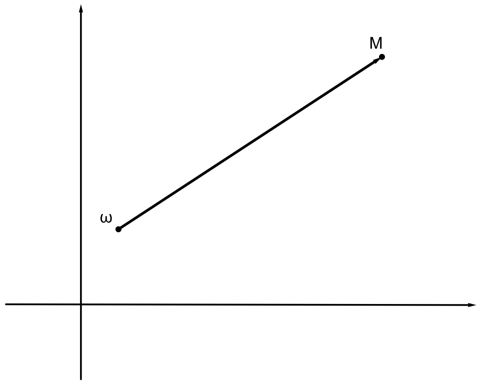

Fig. 2

Ce seront les deux propriétés essentielles qui vont intervenir dans la définition d'un espace affine.

L'application $M \in \mathbb{E} \longmapsto \overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Dant toute la suite un espace vectoriel réel $\mathbb{E}$ de dimension n sera donc vu comme si c'était $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ pour lui garder cet "aspect géométrique" qu'on vient de lui conférer. On se donne maintenant un ensemble $\mathcal{P}$.

1.2. Définition. *On dira que $\mathcal{P}$ possède une structure d'***espace affine** *dirigé par $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ s'il existe une application $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{V}}$ associant à tout couple (M, N) un vecteur $\overrightarrow{MN}$ de telle sorte que :*

(i) $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{MN}$ *pour tous $M, N, L \in \mathcal{P}$* ; c'est la ***relation de Chasles***.

(*) Michel Chasles : éminent mathématicien français (1793-1880) à l'origine de cette relation et beaucoup d'autres choses en géométrie : étude des homographies, des coniques *etc.*

(ii) *Pour tout élément $\omega \in \mathcal{P}$ fixé, l'application partielle $\Phi_\omega : M \in \mathcal{P} \longmapsto \overrightarrow{\omega M} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ est une bijection.*

L'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ est la *direction* de l'espace affine $\mathcal{P}$. Les éléments de $\mathcal{P}$ seront les *points*. L'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ agit sur l'ensemble $\mathcal{P}$ au moyen d'une application $\Psi : (\overrightarrow{u}, M) \in \overrightarrow{\mathcal{V}} \times \mathcal{P} \longmapsto M' = M + \overrightarrow{u} \in \mathcal{P}$ de telle sorte que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$; celle-ci vérifie les propriétés qui suivent :

(i) $M + \overrightarrow{0} = M$ pour tout $M \in \mathcal{P}$;
(ii) $M + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (M + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v}$ pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ et tout $M \in \mathcal{P}$;
(iii) $M + \overrightarrow{u} = M$ implique $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (*simplicité* de l'action) ;
(iv) pour tous M, N de $\mathcal{P}$ il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ tel que $M + \overrightarrow{u} = N$ (*transitivité* de l'action).

Ce qui suit est facile à vérifier. Si on fixe un vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$, l'application partielle $\Psi_{\overrightarrow{u}} : M \in \mathcal{P} \longmapsto M + \overrightarrow{u} \in \mathcal{P}$ est une bijection. L'application $\overrightarrow{u} \longmapsto \Psi_{\overrightarrow{u}}$ est un morphisme injectif du groupe additif $(\overrightarrow{\mathcal{V}}, +)$ dans le groupe des bijections de $\mathcal{P}$. La transformation $\Psi_{\overrightarrow{u}}$ est appelée *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$. Pour la loi de composition, les translations de $\mathcal{P}$ forment un groupe noté $\mathcal{T}$.

1.3. Proposition. *La donnée de l'application Φ de la définition 1.2 est équivalente à celle d'une action Ψ vérifiant les propriétés qu'on vient d'énumérer.*

La démonstration de cette proposition est assez instructive ; nous la laissons au lecteur comme exercice.

1.4. Quelques règles de calcul

- Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$ c'est-à-dire $2\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$ donc $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$.
- Pour tous $M, N \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ si, et seulement si, $M = N$.
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$; c'est la *règle du parallélogramme.*

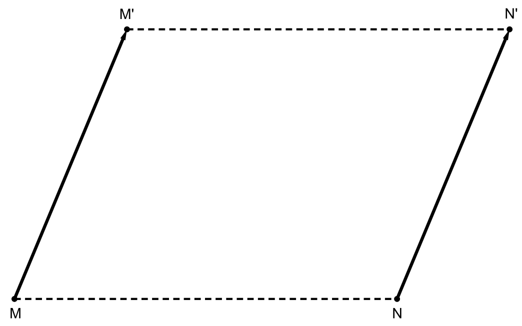

Fig. 3

Dans toute la suite, ce qu'on entendra par espace affine sera la donnée de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ associé à un espace vectoriel $\mathbb{E}$, d'un ensemble $\mathcal{P}$ et d'une application $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{V}}$ ou une action $\Psi : (\overrightarrow{u}, M) \in \overrightarrow{\mathcal{V}} \times \mathcal{P} \longmapsto M + \overrightarrow{u} \in \mathcal{P}$ possédant les propriétés que nous avons décrites pour chacune d'elles. Reste à savoir ce qu'on peut prendre pour ensemble $\mathcal{P}$; voici quelques :

1.5. Exemples

(i) Soit $\mathcal{P} = \overrightarrow{\mathcal{V}}$ un espace vectoriel de dimension n. L'application $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{V}}$ définie par $\Phi(M, N) = N - M$ munit $\mathcal{P}$ d'une structure d'espace affine ; c'est la *structure affine canonique* sur l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

(ii) Soient $\mathcal{P}$ un ensemble quelconque et $f : \mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{V}}$ une bijection. On définit $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{V}}$ par $\Phi(M, N) = f(N) - f(M)$. Il est alors facile de voir que Φ munit $\mathcal{P}$ d'une structure d'espace affine. Si $g : \mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{V}}$ est une autre bijection alors elle définit la même structure affine si, et seulement si, $g \circ f^{-1}$ est une translation (la démonstration est laissée en exercice au lecteur).

1.6. Vectorialisé d'un espace affine

Soient $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{V}}, \Phi)$ un espace affine et ω un point de $\mathcal{P}$. On sait qu'on a une bijection $\Phi_\omega : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\omega M} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$; la bijection inverse est donnée par $\Phi_\omega^{-1}(\overrightarrow{u}) = \omega + \overrightarrow{u}$; donc tout point de $\mathcal{P}$ est de la forme $\omega + \overrightarrow{u}$. On définit une structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{P}$ en posant : $(\omega + \overrightarrow{u}) + (\omega + \overrightarrow{v}) = \omega + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ et $\lambda(\omega + \overrightarrow{u}) = \omega + \lambda\overrightarrow{u}$. L'espace vectoriel ainsi obtenu sera noté $\mathcal{P}_\omega$ et appelé *vectorialisé* de $\mathcal{P}$ relativement à ω. Il dépend du choix de ω comme on le voit sur le dessin ci-dessous : la somme $M + N$ de M et N dans $\mathcal{P}_\omega$ n'est pas la même que leur somme $(M + N)'$ dans $\mathcal{P}_{\omega'}$!

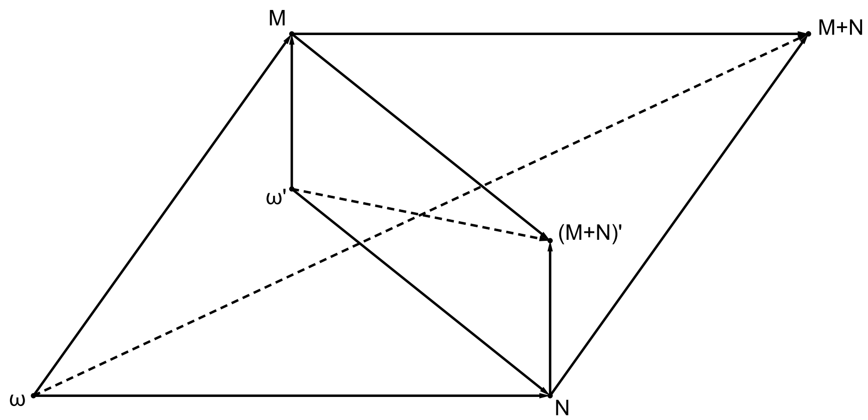

Fig. 4

2. Barycentres

On se situe toujours dans un espace affine $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{V}}, \Phi)$. Soient $M_1, \cdots, M_p$ des points de $\mathcal{P}$ (avec $p \geq 2$), $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des réels et $\omega \in \mathcal{P}$. On pose $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p$.

2.1. Proposition.

(i) *Si $\lambda = 0$, le vecteur $\lambda_1\overrightarrow{\omega M}_1 + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{\omega M}_p$ ne dépend pas de ω.*

(ii) *Si $\lambda \neq 0$, le point $G = \frac{1}{\lambda}(\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_p M_p) = \omega + \frac{1}{\lambda}(\lambda_1\overrightarrow{\omega M}_1 + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{\omega M}_p)$ ne dépend pas de ω. On dira que G est le* **barycentre** *des points $M_1, \cdots, M_p$ affectés respectivement des coefficients $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$.*

Démonstration. Soit ω' un autre point de $\mathcal{P}$.

i) On a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1\overrightarrow{\omega' M}_1 + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{\omega' M}_p &= \lambda_1(\overrightarrow{\omega'\omega} + \overrightarrow{\omega M}_1) + \cdots + \lambda_p(\overrightarrow{\omega'\omega} + \overrightarrow{\omega M}_p) \\
&= (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)\overrightarrow{\omega'\omega} + \lambda_1\overrightarrow{\omega M}_1 + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{\omega M}_p \\
&= \lambda_1\overrightarrow{\omega M}_1 + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{\omega M}_p.
\end{aligned}$$

ii) On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}(\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_p M_p) &= \omega + \frac{1}{\lambda}\left(\lambda_1 \overrightarrow{\omega M}_1 + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{\omega M}_p\right)\\ &= \omega + \frac{1}{\lambda}\left(\lambda_1(\overrightarrow{\omega\omega'} + \overrightarrow{\omega' M}_1) + \cdots + \lambda_p(\overrightarrow{\omega\omega'} + \overrightarrow{\omega' M}_p)\right)\\ &= (\omega + \overrightarrow{\omega\omega'}) + \frac{1}{\lambda}\left(\lambda_1 \overrightarrow{\omega' M}_1 + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{\omega' M}_p\right)\\ &= \omega' + \frac{1}{\lambda}\left(\lambda_1 \overrightarrow{\omega' M}_1 + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{\omega' M}_p\right)\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition. □

2.2. Quelques remarques

i) Si $\lambda_i = 0$, le point M_i n'intervient pas. On peut donc supposer que chacun des λ_i est non nul. On dira alors que le couple (M_i, λ_i) est un *point massique.*

ii) Si on multiplie tous les λ_i par un même nombre s non nul, le point G ne change pas. On peut donc supposer que $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$.

iii) Si les λ_i sont tous égaux (et non nuls), on dira que G est l'*isobarycentre* ou le *centre de gravité* des points $M_1, \cdots, M_p$.

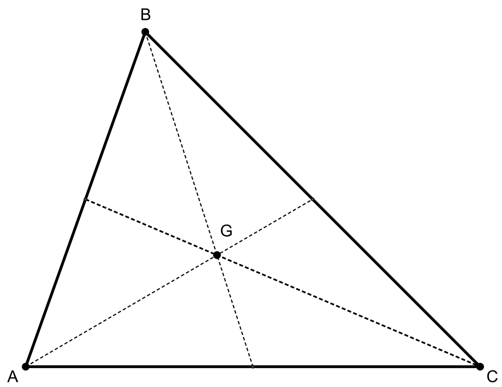

Fig. 5

iv) Lorsque $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 0$, on convient de noter $\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_p M_p$ le vecteur $\lambda_1 \overrightarrow{\omega M}_1 + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{\omega M}_p$. Par exemple $N - M = \overrightarrow{\omega N} - \overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{MN}$.

2.3. Détermination pratique des barycentres

On se donne toujours des points $M_1, \cdots, M_p$ (avec $p \geq 2$) et $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des réels. On pose $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p$ qu'on suppose non nul. Le lecteur est invité à établir les assertions qui suivent.

i) *Origine quelconque* ω

Dans ce cas, $G = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ si, et seulement si, on a $\lambda \overrightarrow{\omega G} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{\omega M}_i$.

ii) *Origine en* G

Dans ce cas, $G = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ si, et seulement si, on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{0}$.

iii) *Origine en* M_j

Dans ce cas, $G = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i M_i$ si, et seulement si, on a $\lambda\overrightarrow{M_jG} = \sum_{i\neq j}\lambda_i\overrightarrow{M_jM}_i$.

2.4. Exercice

Soient $(M_1, \lambda_1), \cdots, (M_p, \lambda_p)$ p points massiques. On se donne une partition de l'ensemble $\{1, \cdots, p\}$ par des parties $J_1 = \{1, \cdots, p_1\}$, $J_2 = \{p_1 + 1, \cdots, p_2\}$,... et $J_k = \{p_{k-1} + 1, \cdots, p_k\}$ où $p_k = p$. Pour tout $\ell \in \{1, \cdots, k\}$ on note G_ℓ le barycentre des points massiques $\{(M_j, \lambda_j) : j \in J_\ell\}$ et $\lambda^\ell = \sum_{j\in J_\ell}\lambda_j$. On suppose que les nombres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p \neq 0$ et $\lambda^\ell \neq 0$ pour tout $\ell \in \{1, \cdots, k\}$. Montrer que le barycentre G des points massiques $(M_1, \lambda_1), \cdots, (M_p, \lambda_p)$ est le même que celui des points massiques $\{(G_\ell, \lambda^\ell) : \ell \in \{1, \cdots, k\}\}$. (C'est l'*associativité* du calcul du barycentre.)

3. Sous-espaces affines

Soit $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{V}})$ un espace affine dont la structure est donnée par une application $\Phi : \mathcal{P}\times\mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{V}}$. Si on fixe un point $\omega \in \mathcal{P}$, on a une bijection $\Phi_\omega : M \in \mathcal{P} \longrightarrow \overrightarrow{\omega M} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$.

3.1. Définition. *Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}$. On dira que $\mathcal{F}$ est un* ***sous-espace affine*** *de $\mathcal{P}$ si $\mathcal{F}$ est vide ou s'il existe un point $\omega \in \mathcal{P}$ tel que l'image $\Phi_\omega(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ par l'application Φ_ω soit un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$. La* ***dimension*** *de $\mathcal{F}$ est par définition celle de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.*

Si $M, N \in \mathcal{F}$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ appartient à $\overrightarrow{\mathcal{F}}$; $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est la *direction* de $\mathcal{F}$.

3.2. Proposition. *Soient $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ et ω un point de $\mathcal{P}$. Il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F}$ passant par ω et de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. Le sous-espace affine $\mathcal{F}$ en question est tel que $\Phi_\omega(\mathcal{F}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}$. Il est donc nécessairement donné par $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{P} : \overrightarrow{\omega M} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}\}$. Ceci montre son existence et son unicité. □

Il résulte de la démonstration de cette proposition que deux sous-espaces affines ayant même direction n'ont aucun point commun ou sont confondus !

3.3. Exemples

(i) Un sous-espace affine de dimension 0 est un point. Sa direction est le sous-espace vectoriel réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$.
(ii) Une *droite affine* est un sous-espace affine de dimension 1.
(iii) Un *plan affine* est un sous-espace affine de dimension 2.
(iv) Soient $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{W}}$ deux espaces vectoriels et $f : \overrightarrow{\mathcal{V}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{W}}$ une application linéaire. Alors, pour tout $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{W}}$, $f^{-1}(\overrightarrow{w})$ est un sous-espace affine de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ (pour sa structure affine canonique).

4. Repères et coordonnées

Soit $(\mathcal{P}, \overrightarrow{V}, \Phi)$ un espace affine de dimension n. On se donne $p + 1$ points $C_0, \cdots, C_p$ de $\mathcal{P}$.

4.1. Définition. *On dira que les points $C_0, \cdots, C_p$ sont* ***affinement indépendants*** *si les vecteurs $\overrightarrow{C_0C_1}, \cdots, \overrightarrow{C_0C_p}$ sont linéairement indépendants dans $\overrightarrow{\mathcal{V}}$. Il est alors clair que ceci impose la condition $p \leq n$.*

Si $p = n$, $(\overrightarrow{C_0C_1}, \cdots, \overrightarrow{C_0C_n})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $(C_0; \overrightarrow{C_0C_1}, \cdots, \overrightarrow{C_0C_n})$ est un repère cartésien de $\mathcal{P}$. Pour $M \in \mathcal{P}$, il existe des réels uniques $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que :

$$\overrightarrow{C_0M} = \lambda_1\overrightarrow{C_0C_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{C_0C_n}.$$

Les nombres réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les *coordonnées cartésiennes* de M dans le repère (cartésien) $(C_0; \overrightarrow{C_0C_1}, \cdots, \overrightarrow{C_0C_n})$. On a donc $M = C_0 + \lambda_1\overrightarrow{C_0C_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{C_0C_n}$, ce qui est équivalent à : $M = (1 - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n))C_0 + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_n C_n$. Si on pose $\lambda_0 = (1 - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n))$ on voit que tout point M de $\mathcal{P}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$M = \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_n C_n \tag{2}$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des réels tels que $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$; $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ sont les *coordonnées barycentriques* de M dans le repère affine $(C_0, C_1, \cdots, C_n)$. Par exemple C_0 a pour coordonnées barycentriques $(1, 0, \cdots, 0)$, celles de C_1 sont $(0, 1, 0, \cdots, 0)$ *etc.*

4.2. Mesure algébrique sur une droite

Deux points A et B de $\mathcal{P}$ sont affinement indépendants si, et seulement si, $A \neq B$. L'ensemble $(AB) = \{(1-\lambda)A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est la droite définie par les points A et B. On a une application :

$$p : \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}\overrightarrow{AB} \longmapsto A + \lambda\overrightarrow{AB} \in (AB). \tag{3}$$

C'est la *représentation paramétrique* de (AB) dans le repère affine (A, B) (de la droite (AB)).

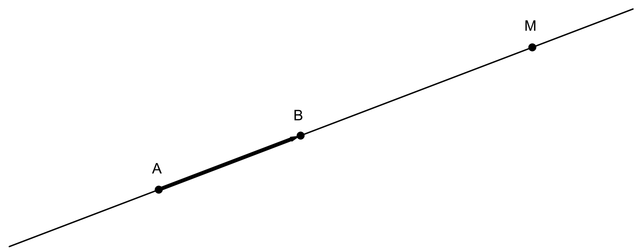

Fig. 6

Soient $M = A + \lambda\overrightarrow{AB}$ et $N = A + \mu\overrightarrow{AB}$ deux points de (AB). Alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\mu - \lambda)\overrightarrow{AB}$. Le nombre réel $\mu - \lambda$ est la *mesure algébrique* du vecteur $\overrightarrow{MN}$ par rapport au repère affine (A, B) sur la droite (AB) ; on la note $\overline{MN}$. Cette mesure algébrique dépend bien sûr de la représentation paramétrique de la droite (AB) qui dépend elle-même du repère (A, B). Par contre, on peut montrer (laissé en exercice au lecteur) que si on se donne quatre points M, N, M', N' sur la droite (AB) le rapport $\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}}$ n'en dépend pas !

5. Convexité

Soit $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{V}})$ un espace affine. La donnée de deux points quelconques A et B de $\mathcal{P}$ nous permet de définir une application $\lambda \in [0, 1] \longrightarrow A + \lambda\overrightarrow{AB} \in \mathcal{P}$. L'image qu'on note $[AB]$ de cette application est appelée *segment* d'*origine* A et d'*extrémité* B. (Le point $A + \lambda\overrightarrow{AB}$ est aussi noté $(1-\lambda)A + \lambda B$.)

5.1. Définition. *Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est dite* **convexe** *si, pour tous points $A, B \in \mathcal{C}$, le segment $[AB]$ est contenu tout entier dans $\mathcal{C}$.*

La proposition qui suit dit qu'une partie convexe est caractérisée par le fait que tous les barycentres d'un ensemble fini de points de cette partie restent dans cette partie.

5.2. Proposition. *Une partie $\mathcal{C}$ est convexe si, et seulement si, pour toute partie finie $\{A_1, \cdots, A_p\}$ de $\mathcal{C}$ et tous réels positifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$, le point $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i$ appartient à $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Pour tout entier $p \geq 2$, notons $(\mathcal{H}_p)$ la propriété :

$$(\mathcal{H}_p) \qquad \begin{cases} \text{Pour tous } A_1, \cdots, A_p \in \mathcal{C} \\ \text{et tous } \lambda_1, \cdots, \lambda_p \in [0,1] \\ \text{tels que } \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1 \\ \text{le point } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i \text{ est dans } \mathcal{C}. \end{cases}$$

La proposition dit simplement que, pour tout $p \geq 2$, la propriété $(\mathcal{H}_p)$ est équivalente à $(\mathcal{H}_2)$. Il est clair que $(\mathcal{H}_p)$ implique $(\mathcal{H}_2)$. Nous allons montrer la réciproque par récurrence, c'est-à-dire que $(\mathcal{H}_p)$ et $(\mathcal{H}_2)$ impliquent $(\mathcal{H}_{p+1})$. Soient donc $A_1, \cdots, A_{p+1}$ des points de $\mathcal{C}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p+1} \in [0,1]$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{p+1} = 1$. On suppose que tous les λ_i sont strictement positifs sinon on est dans le cas où on a au plus p points (et la propriété est supposée vraie). On pose $\alpha_1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p$, $\alpha_2 = \lambda_{p+1}$, $K_1 = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} A_1 + \cdots + \frac{\lambda_p}{\alpha_1} A_p$ et $K_2 = A_{p+1}$. Par $(\mathcal{H}_p)$ le point K_1 est dans $\mathcal{C}$ et par $(\mathcal{H}_2)$ le point :

$$\begin{aligned} \lambda_1 A_1 + \cdots + A_{p+1} A_{p+1} &= \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1} A_1 + \cdots + \frac{\lambda_p}{\alpha_1} A_p + \frac{\lambda_{p+1}}{\alpha_1} A_{p+1} \right) \\ &= \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 \end{aligned}$$

est aussi dans $\mathcal{C}$. Ceci démontre la proposition. □

On vérifie facilement que l'intersection d'une famille quelconque de parties convexes est encore convexe (ou vide évidemment). Par contre la réunion de deux parties convexes n'est pas toujours convexe (les exemples illustrant cette situation sont faciles à construire).

Soit $\mathcal{C}_0$ une partie de $\mathcal{P}$. On appelle *enveloppe convexe* de $\mathcal{C}_0$ le plus petit convexe contenant $\mathcal{C}_0$. C'est aussi l'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{C}_0$. On la note $\widehat{\mathcal{C}_0}$. On peut montrer facilement que l'on obtient $\widehat{\mathcal{C}_0}$ à partir de $\mathcal{C}_0$ en prenant toutes les combinaisons finies convexes $\sum \lambda_i A_i$ avec les A_i des points de $\mathcal{C}_0$ et les λ_i des réels positifs de somme égale à 1.

5.3. Exemples

(i) Tout sous-espace affine de $\mathcal{P}$ est convexe (immédiat à vérifier).

(ii) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine canonique, tout demi-espace c'est-à-dire une partie définie par une inéquation de la forme $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \geq c$ (où $c \in \mathbb{R}$ et les λ_i sont des constantes réelles non toutes nulles) est convexe.

(iii) La partie délimitée par les côtés d'un triangle est convexe.

(iv) La tête à Toto (voir Fig. 6 bis) est-elle convexe ?