# Jour n$^o$1

## Exercice 1.1

Un fusible est constitué par un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire $S$, de longueur utile $L$, de masse volumique $\mu$ et de capacité thermique massique $c$. Il possède une conductivité électrique $\gamma$ et une conductivité thermique $K$. Il est traversé par un courant électrique continu d'intensité $I$. Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les températures en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées et égales à la température $T_0$ du milieu ambiant. On se place en régime permanent.

On donne dans les unités du système international :
$K = 50$ SI ; $\gamma = 1.10^6$ SI ; $c = 400$ SI ; $\rho = 3.10^3$ kg.m$^{-3}$ ; $T_0 = 300$ K ; $L = 2$ cm.

**1)** Établir l'équation différentielle liant la température $T$, $x$, $S$ et les données en réalisant un bilan d'énergie sur une portion $dx$ du fusible. Donner l'expression littérale de $T(x)$ et représenter graphiquement $T$ en fonction de $x$.

**2)** Le matériau constituant le fil fond à $T_F = 400$ K. On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{max} = 16$ A. Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de $I_{max}$. Déterminer l'expression littérale de l'aire $S$ à prévoir. Faire l'application numérique.

**3)** Exprimer littéralement la puissance thermique $\mathcal{P}_{th}(0)$ transférée par conduction en $x = 0$. Préciser si cette puissance est reçue ou fournie par le fil. Même question pour la puissance thermique $\mathcal{P}_{th}(L)$ transférée en $x = L$. Quelle relation a-t-on entre $\mathcal{P}_{th}(0)$, $\mathcal{P}_{th}(L)$ et la puissance électrique $\mathcal{P}_e$ fournie à l'ensemble du fil ? Commenter.

## Exercice 1.2

On souhaite remplacer le ressort qui permet de lancer une bille en acier à partir d'une rampe de lancement légèrement inclinée, comme celle d'un flipper.

On donne :

- masse volumique de l'acier : $\rho = 8.10^3$ kg.m$^{-3}$ ;
- longueur de la rampe de lancement : 1,2 m.

**Déterminer l'intervalle pour lequel la constante de raideur du ressort conviendrait.**

## Énoncé

Un fusible est constitué par un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire $S$, de longueur utile $L$, de masse volumique $\mu$ et de capacité thermique massique $c$. Il possède une conductivité électrique $\gamma$ et une conductivité thermique $K$. Il est traversé par un courant électrique continu d'intensité $I$. Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les températures en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées et égales à la température $T_0$ du milieu ambiant. On se place en régime permanent.

On donne dans les unités du système international :
$K = 50$ SI ; $\gamma = 1.10^6$ SI ; $c = 400$ SI ; $\rho = 3.10^3$ kg.m$^{-3}$ ; $T_0 = 300$ K ; $L = 2$ cm.

**1)** Établir l'équation différentielle liant la température $T$, $x$, $S$ et les données en réalisant un bilan d'énergie sur une portion $dx$ du fusible. Donner l'expression littérale de $T(x)$ et représenter graphiquement $T$ en fonction de $x$.

**2)** Le matériau constituant le fil fond à $T_F = 400$ K. On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{max} = 16$ A. Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de $I_{max}$. Déterminer l'expression littérale de l'aire $S$ à prévoir. Faire l'application numérique.

**3)** Exprimer littéralement la puissance thermique $\mathcal{P}_{th}(0)$ transférée par conduction en $x = 0$. Préciser si cette puissance est reçue ou fournie par le fil. Même question pour la puissance thermique $\mathcal{P}_{th}(L)$ transférée en $x = L$. Quelle relation a-t-on entre $\mathcal{P}_{th}(0)$, $\mathcal{P}_{th}(L)$ et la puissance électrique $\mathcal{P}_e$ fournie à l'ensemble du fil ? Commenter.

## Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice guidé de deuxième année qui porte sur les phénomènes de transport. Une étude de conduction thermique et électrique est menée en régime permanent. L'énoncé est très détaillé.

> Rapport du jury 2012
>
> Certains candidats ne lisent pas correctement les énoncés qui contiennent parfois des informations utiles pour traiter l'exercice. Certains sujets sont très progressifs et particulièrement détaillés. Ils peuvent alors paraître longs au premier coup d'oeil, mais ne doivent pas déstabiliser les candidats.

**1)** Pour établir l'équation différentielle demandée, il faut effectuer un bilan d'énergie sur une longueur $dx$ du fil constituant le fusible.

> Rapport du jury 2016
>
> Sur les phénomènes de transport, les lois sont globalement connues, ainsi que les unités des grandeurs, néanmoins les candidats oublient trop souvent la cause du phénomène de diffusion : différence de température, de concentration...

La loi de Fourier : $\overrightarrow{j_{th}} = -K\overrightarrow{\text{grad}}T$, permet ensuite d'exprimer le vecteur densité de flux thermique qui intervient dans l'expression de la puissance thermique (ou flux thermique) : $\mathcal{P}_{th} = \Phi = \iint_S \overrightarrow{j_{th}}.\overrightarrow{dS}$.

Rapport du jury 2012

En diffusion de particule ou diffusion thermique, l'établissement d'un bilan pose toujours autant de difficultés. Les étudiants définissent rarement le système sur lequel ils raisonnent, et sont étonnés que le jury les interpelle à ce propos. Les expressions analytiques des lois de Fourier et de Fick sont généralement connues, par contre il est difficile d'avoir l'unité de $\overrightarrow{j_{th}}$ et $\overrightarrow{j_D}$.

$\hookrightarrow$ Le bilan d'énergie est réalisé grâce au premier principe de la thermodynamique sur une portion de longueur du fil constituant le fusible. La variation d'énergie interne est nulle (énergie interne constante) car le régime est permanent. Si l'énergie interne n'est pas constante alors cela signifie que le système accumule ou perd en permanence de l'énergie et que la température varie, ce n'est donc pas un régime permanent.

**2)** Pour répondre à cette question, il faut déterminer à quel endroit, dans le fil constituant le fusible, la température est maximale. Une étude graphique grâce au tracé de $T(x)$ effectué à la question précédente permet de déterminer cet endroit. On peut alors déterminer littéralement et numériquement la valeur de la section $S$ du fil.

Rapport du jury 2016

Toujours prendre du recul sur les résultats littéraux et numériques obtenus. Est-ce homogène ? Est-ce cohérent avec les valeurs habituelles ? Il faut faire ces réflexions explicitement à l'oral au tableau devant l'examinateur.

Rapport du jury 2013

Les élèves ont toujours du mal à donner un ordre de grandeur ou à effectuer une application numérique avec une précision de l'ordre de 5% à 10%. Il est étonnant de trouver des candidats démunis devant une évaluation à 5% ou 10% près, du type $10/\pi$ , voire même 1/5...

$\hookrightarrow$ La température est maximale au milieu du fil.

**3)** Pour exprimer la puissance thermique, on calcule le flux du vecteur densité de courant thermique à travers le section $S$ du fil constituant le fusible. Pour exprimer le vecteur densité de courant thermique, on utilise la loi de Fourier et l'expression de $T(x)$ obtenue à la première question.

$\hookrightarrow$ L'expression de $T(x)$ et la loi de Fourier permettent d'exprimer les puissances thermiques en $x = 0$ et $x = L$.

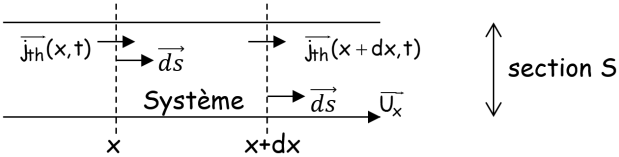
$\hookrightarrow$ Le signe de la puissance thermique permet de conclure et de préciser si la puissance est reçue ou fournie par le fil.

## Corrigé

**1)** On fait un bilan d'énergie dans un conducteur thermique sur une longueur $dx$ du fil.

Rapport du jury 2014

D'une façon générale, l'établissement des bilans, de matière, d'énergie, de masse... est catastrophique. Il est rare que le système soit défini.




Le conducteur thermique (ici le fil constituant le fusible) est supposé unidimensionnel, ce qui signifie que la température ne dépend que d'une variable d'espace et du temps : $T(x,t)$. Par la loi de Fourier, l'unidimensionnalité de $T$ impose l'unidirectionnalité de $\overrightarrow{j_{th}}$ :

$$\overrightarrow{j_{th}} = -K.\overrightarrow{\text{grad}}(T) = -K.\frac{\partial T}{\partial x}\vec{u_x} = j_{th}.\overrightarrow{u_x}.$$

Pour faire un bilan local et non global, on s'intéresse à une portion élémentaire du matériau située entre $x$ et $x+dx$, de volume $Sdx$. On note $\rho$, $K$ et $c$ respectivement la masse volumique, la conductivité thermique et la capacité thermique massique du matériau. On rappelle que $c$ est la quantité de chaleur à apporter à 1 kg de système pour augmenter sa température de 1°C (ou 1 K).

Faisons le bilan d'énergie du système en appliquant le premier principe de la thermodynamique entre $t$ et $t+dt$ :

$$d(U+E_m) = \delta W + \delta Q.$$

> Rapport du jury 2013
>
> En thermodynamique, les systèmes et les transformations sont souvent mal définis. Il y a souvent un manque de rigueur dans les notations concernant les transformations élémentaires ($W$ au lieu de $\delta W$, ou $Q$ au lieu de $\delta Q$), ce qui aboutit à des intégrales sans éléments différentiels. Ces dégradations successives génèrent des non sens.

Nous étudierons la conduction thermique dans un solide, donc incompressible, de sorte que les forces de pression ne travaillent jamais.
Cependant dans le cas de l'exercice, le travail des forces extérieures correspond au travail de la force électrique dont la puissance (effet Joule) est $\delta RI^2$, $\delta R$ correspondant à la résistance de la portion $dx$ du fusible, on a donc :

$$\delta W = \delta W_{pression} + \delta W_{ext} = \delta W_{ext} = \delta RI^2 dt.$$

De plus le milieu est macroscopiquement immobile, d'où $dE_m = 0$. On a donc :

$$dU = \delta RI^2 dt + \delta Q.$$

De plus, la variation d'énergie interne est nulle car le régime est permanent. On a donc :

$$dU = U(t+dt) - U(t) = 0 = \delta RI^2 dt + \delta Q.$$

Quels sont les transferts d'énergie thermique avec l'extérieur ?

Ici, ils ne sont que conductifs (pas de convection ni de rayonnement), en l'occurence le système reçoit de l'énergie thermique à travers $S(x)$ et en perd à travers $S(x+dx)$.

Pendant $dt$ le transfert thermique total $\delta Q$ algébriquement reçu est donc :

$$\delta Q = \delta Q_{conduc}(x) - \delta Q_{conduc}(x+dx) = \mathcal{P}_{th}(x)dt - \mathcal{P}_{th}(x+dx)dt.$$

On sait que la puissance thermique correspond au flux du vecteur densité de courant thermique :

$$\mathcal{P}_{th} = \iint_S \overrightarrow{j_{th}}.\overrightarrow{dS}.$$

On peut donc écrire :

$$\delta Q = \left[\iint_S \vec{j}_{th}(x).\overrightarrow{dS} - \iint_S \vec{j}_{th}(x+dx).\overrightarrow{dS}\right] dt.$$

$\overrightarrow{j_{th}}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires et de plus, $j_{th}$ est uniforme sur la section $S$ du fil, d'où :

$$\iint_S \vec{j}_{th}(x)\overrightarrow{dS} = \iint_S j_{th}(x)dS = j_{th}(x)\iint_S dS = j_{th}(x)S.$$

En rassemblant tous les résultats :

$$0 = \delta RI^2dt + [j_{th}(x)S - j_{th}(x+dx)S]\,dt \simeq \delta RI^2dt - \frac{dj_{th}}{dx}(x)Sdxdt$$

$$0 = \delta RI^2\cancel{dt} - \frac{dj_{th}}{dx}(x)Sdx\cancel{dt}.$$

La résistance $R$ d'un conducteur cylindrique de conductivité $\gamma$, de longueur $\ell$, de section $S$, parcouru par un courant $I$ uniformément réparti et parallèle à son axe est :

$$R = \frac{\ell}{\gamma S}.$$

En remplaçant $\delta R$ par son expression :

$$0 = \frac{dx}{\gamma S}I^2 - \frac{dj_{th}}{dx}(x)Sdx \Leftrightarrow \frac{dj_{th}}{dx}(x) = \frac{I^2}{\gamma S^2}.$$

On utilise la loi de Fourier : $j_{th} = -K\dfrac{dT}{dx}$, pour obtenir l'équation différentielle liant $T$, $x$ et $S$ :

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2}(x) + \frac{I^2}{K\gamma S^2} = 0.}$$

Pour obtenir l'expression de $T(x)$, on résout cette équation différentielle :

$$\frac{d^2T}{dx^2}(x) = -\frac{I^2}{K\gamma S^2}$$
$$\frac{dT}{dx}(x) = -\frac{I^2}{K\gamma S^2}x + C_1$$
$$T(x) = -\frac{I^2}{K\gamma S^2}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

Les constantes $C_1$ et $C_2$ sont déterminées à partir des conditions aux limites.

En $x = 0$ :

$$T(0) = T_0 = C_2.$$

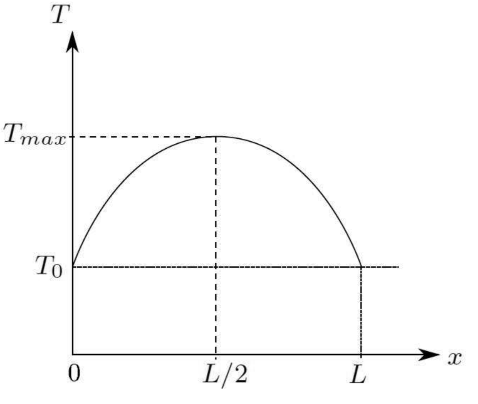
En $x = L$ :

$$T(L) = T_0 = -\frac{I^2}{K\gamma S^2}\frac{L^2}{2} + C_1 L + T_0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{I^2}{K\gamma S^2}\frac{L}{2}.$$

D'où l'expression de $T(x)$ :

$$\boxed{T(x) = -\frac{I^2}{2K\gamma S^2}(x^2 - xL) + T_0.}$$

La courbe représentative de $T(x)$ a l'allure suivante :




**2)** La température est maximale au milieu du fil, c'est là, qu'il va fondre en premier donc en $x = L/2$.
Si l'on veut que $T_F = T(L/2)$, on a :

$$T(L/2) = T_F = -\frac{I_{max}^2}{2K\gamma S^2}\left(\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{2}\right) + T_0.$$

On peut alors exprimer la section $S$ du fil constituant le fusible :

$$\boxed{S = I_{max} L \sqrt{\frac{1}{8K\gamma(T_F - T_0)}}.}$$

Application numérique :

$$S = 16 \times 2.10^{-2} \times \sqrt{\frac{1}{8 \times 50 \times 1.10^6 \times (400 - 300)}} = 16 \times 2.10^{-2} \times \sqrt{\frac{1}{400.10^8}}$$

$$S = \frac{16 \times 2.10^{-2}}{2.10^5} = 16.10^{-7}\ \text{m}^2 = 1,6.10^{-6}\ \text{m}^2 = 1,6\ \text{mm}^2.$$

$$\boxed{S = 1,6\ \text{mm}^2.}$$

> Rapport du jury 2017
>
> La calculatrice personnelle du candidat pourra être autorisée mais uniquement pendant l'exposé au tableau.

**3)** La puissance reçue par le fil en $x = 0$ est égale au flux du vecteur densité de courant thermique à travers la surface située en $x = 0$, soit :

$$\mathcal{P}_{th}(0) = j_{th}(0)S.$$

Or la loi de Fourier donne :

$$j_{th} = -K\frac{dT}{dx}(0) = -\frac{I^2L}{2\gamma S^2}.$$

En remplaçant, on a :

$$\boxed{\mathcal{P}_{th}(0) = -\frac{I^2L}{2\gamma S}.}$$

La puissance est négative, donc c'est le fil qui cède de l'énergie à l'extérieur.

> Rapport du jury 2014
>
> Les bilans énergétiques sont décevants : trop de candidats confondent puissance et travail et une écriture globale avec une écriture volumique. L'utilisation des notations pose trop souvent problème.

De même en $x = L$, le problème est symétrique. La puissance est donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_{th}(L) = -\frac{I^2L}{2\gamma S}.}$$

La puissance électrique reçue par l'ensemble du fil est $\mathcal{P}_e = RI^2$. Les trois puissances sont reliées par :

$$\boxed{\mathcal{P}_{th}(0) + \mathcal{P}_{th}(L) + \mathcal{P}_e = 0.}$$

Toute la puissance dissipée par effet Joule est fournie à l'extérieur au niveau des deux extrémités puisque la surface latérale du fusible est calorifugée.

## Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que lorqu'on doit effectuer un bilan d'énergie, il faut précisément définir le système.

> Rapport du jury 2014
>
> D'une façon générale, l'établissement des bilans, de matière, d'énergie, de masse... est catastrophique. Il est rare que le système soit défini.

♡ Il faut se souvenir qu'un bilan local d'énergie impose d'appliquer le premier principe de la thermodynamique sur une portion élémentaire du matériau située entre $x$ et $x + dx$, de volume $Sdx$.

♡ Il faut se souvenir qu'en régime permanent, la variation d'énergie interne est nulle :

$$dU = U(t + dt) - U(t) = 0.$$

♡ Il faut se souvenir que la puissance thermique correspond au flux du vecteur densité de courant thermique :

$$\mathcal{P}_{th} = \iint_S \overrightarrow{j_{th}}.\overrightarrow{dS}.$$

♡ Il faut se souvenir que pour obtenir une équation différentielle pour la température $T$, il faut :

1. Faire un bilan d'énergie interne en deux étapes :
   (a) Déterminer la variation d'énergie interne et en déduire le transfert thermique échangé avec l'extérieur.
   (b) Déterminer le flux thermique (puissance thermique) reçu par le matériau.
2. Utiliser la loi de Fourier pour remplacer la densité de courant thermique par la température $T$.

## Formulaire

• Premier principe de la thermodynamique :

$$d(U + E_m) = \delta W + \delta Q.$$

• Loi de Fourier :
Pour un conducteur thermique de conductivité thermique $K$ :

$$\overrightarrow{j_{th}} = -K.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(T).$$

Dans le cas unidimensionnel, la température ne dépend que d'une variable d'espace et du temps : $T(x,t)$. Par la loi de Fourier, l'unidimensionnalité de $T$ impose l'unidirectionnalité de $\overrightarrow{j_{th}}$ :

$$\overrightarrow{j_{th}} = -K.\frac{\partial T}{\partial x}\vec{u_x} = j_{th}.\overrightarrow{u_x}.$$

• Puissance thermique (ou flux thermique) :
La puissance thermique correspond au flux du vecteur densité de courant thermique :

$$\mathcal{P}_{th} = \Phi_{th} = \iint_S \overrightarrow{j_{th}}.\overrightarrow{dS}.$$

• Résistance électrique :
La résistance $R$ d'un conducteur cylindrique de conductivité électrique $\gamma$, de longueur $\ell$, de section $S$, parcouru par un courant $I$ uniformément réparti et parallèle à son axe est :

$$R = \frac{\ell}{\gamma S}.$$

• Puissance d'un conducteur électrique dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{P}_{Joule} = RI^2.$$