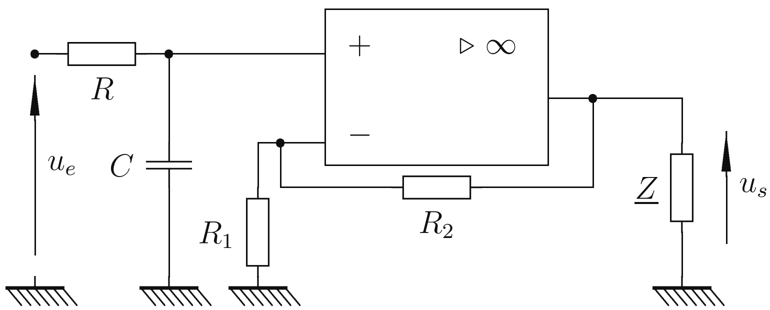
Jour n^{o}1

Exercice 1.1

Soit le filtre représenté ci-dessous et pour lequel $R = 100\ \Omega$, $C = 10\ \mu$F, $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 9$ kΩ. L'amplificateur opérationnel est parfait.



1) Indiquer si l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire et justifier pourquoi.

2) Quelle est la nature du filtre ?

3) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre.

4) Quelle est l'influence de $\underline{Z}$? Quel est l'utilité d'un tel montage ?

5) Quelle est la fréquence de coupure du filtre ?

6) Tracer le diagramme de Bode du filtre.

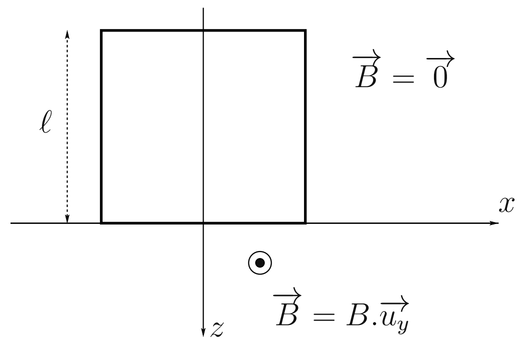
7) Soit $u_e(t) = 0,5 + 3\cos(6\pi f_0 t) - 0,5\sin(14\pi f_0 t)$.
Dessiner le spectre de $u_e(t)$.

8) Déterminer $u_s(t)$ et dessiner son spectre.

Exercice 1.2

Un cadre carré de masse m et de côté ℓ assimilé à une résistance R se déplace dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = g.\overrightarrow{u_z}$ dans une zone de l'espace où le champ magnétique est stationnaire avec $\overrightarrow{B}(z < 0) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{B}(z > 0) = B.\overrightarrow{u_y}$ avec B constant.

À l'instant $t = 0$, on l'abandonne sans vitesse initiale au moment où il va entrer dans la zone où $\overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$.



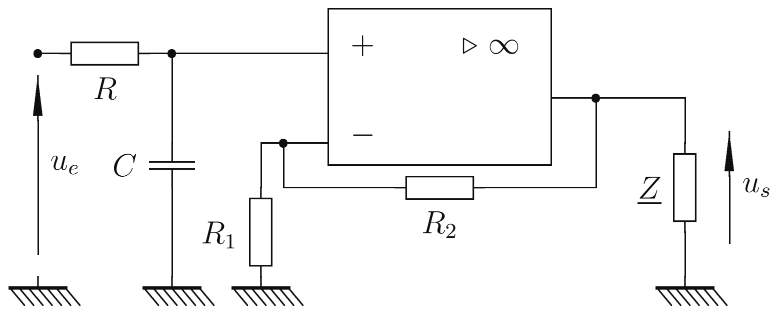
1) Décrire qualitativement ce qui va se produire quand le cadre se trouvera dans le champ magnétique.

2) Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ du cadre.

3) Donner l'expression de $v(t)$ puis $z(t)$.

Énoncé

Soit le filtre représenté ci-dessous et pour lequel $R = 100\ \Omega$, $C = 10\ \mu\text{F}$, $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 9\ \text{k}\Omega$. L'amplificateur opérationnel est parfait.



1) Indiquer si l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire et justifier pourquoi.

2) Quelle est la nature du filtre ?

3) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre.

4) Quelle est l'influence de $\underline{Z}$? Quel est l'utilité d'un tel montage ?

5) Quelle est la fréquence de coupure du filtre ?

6) Tracer le diagramme de Bode du filtre.

7) Soit $u_e(t) = 0,5 + 3\cos(6\pi f_0 t) - 0,5\sin(14\pi f_0 t)$.
Dessiner le spectre de $u_e(t)$.

8) Déterminer $u_s(t)$ et dessiner son spectre.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice classique d'électrocinétique de première année sur l'étude d'un filtre actif utilisant un amplificateur opérationnel. La première partie jusqu'à l'analyse spectrale ne doit pas poser de problème. Il faut cependant être vigilant car ce genre d'exercices classiques de première année place souvent les candidats dans des situations délicates.

> Rapport du jury 2011
>
> Les examinateurs constatent de façon récurrente que le programme de première année est moins bien connu que celui de deuxième année. Rappelons que la physique apprise en première année fait partie du programme du concours.

1) Cette question ne doit pas poser de problème et doit être traitée rapidement. Il faut absolument connaître les définitions du cours et ne pas confondre la notion d'amplificateur opérationnel en régime linéaire avec la notion d'amplificateur opérationnel idéal.

> Rapport du jury 2010
>
> Lors de l'étude des circuits électriques, il ne faut pas confondre la notion d'amplificateur opérationnel idéal et la notion d'amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire. Les montages utilisant des comparateurs soulèvent alors des difficultés.

Pour répondre à cette question il faut simplement s'assurer qu'il existe bien une liaison entre la borne de sortie (u_s) de l'amplificateur opérationnel et l'entrée inverseuse ($-$) (boucle de rétroaction négative).

$\hookrightarrow$ L'amplificateur opérationnel ne peut fonctionner en régime linéaire que s'il existe une boucle de rétroaction négative

2) Il s'agit d'une question classique préalable à l'étude de la fonction de transfert du filtre. On demande ici une analyse physique du dispositif sans faire de calculs.

> Rapport du jury 2011
>
> Les calculs ne doivent servir qu'à quantifier un résultat mais ne peuvent en aucun cas se substituer à une explication.

> Rapport du jury 2009
>
> Nous rappelons qu'une évaluation n'est pas une fin en soi. Un commentaire physique, une critique ou un rapprochement avec une situation analogue est toujours bienvenu.

Pour déterminer la nature du filtre, il faut réaliser les schémas électriques équivalents à basses et hautes fréquences en tenant compte du comportement du condensateur à basses et hautes fréquences. Notez qu'un condensateur à basses fréquences se comporte comme un interrupteur ouvert alors qu'il se comporte comme un fil à hautes fréquences.

> Rapport du jury 2011
>
> Les schémas équivalents basses et hautes fréquences sont trop souvent erronés et surtout non exploités.

$\hookrightarrow$ Cette question est essentielle car elle permet de prévoir physiquement le comportement du filtre. On pourra ainsi vérifier si la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega)$ obtenue à la question suivante est en accord avec cette étude.

3) Tout consiste à appliquer la loi des nœuds en terme de potentiel (ou directement le théorème de Millman) à l'entrée inverseuse ($-$) et utiliser les propriétés de l'amplificateur opérationnel idéal ($I_- = I_+ = 0$) fonctionnant en régime linéaire ($v_+ - v_- = \varepsilon = 0$).
Il est judicieux de présenter la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega)$ en fonction de la fonction de transfert d'un filtre connu, ici un filtre passe-bas du premier ordre.

$\hookrightarrow$ Cette question doit permettre de faire le lien avec la nature du filtre déterminée à la question précédente.

4) Il faut indiquer ici que l'impédance $\underline{Z}$ est une impédance de charge qui modélise un dipôle placé à la sortie du filtre. Il s'agit ici de modéliser le comportement de ce filtre dans une condition réelle d'utilisation. Tout consiste à regarder si la charge d'impédance $\underline{Z}$ intervient dans la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre.

$\hookrightarrow$ Il faut préciser si la fonction de transfert du filtre dépend de l'impédance $\underline{Z}$. Ceci permet ensuite de conclure sur l'intérêt pratique d'un tel montage.

5) Il suffit ici d'appliquer la définition de la fréquence de coupure f_0 à -3 dB d'un filtre et de calculer cette valeur.

> Rapport du jury 2009
>
> Les élèves ont toujours du mal à donner un ordre de grandeur ou à effectuer une application numérique avec une précision de l'ordre de 5% à 10%. Il est étonnant de trouver des candidats démunis devant une évaluation à 5% ou 10% près, du type $\frac{10}{\pi}$, voire même $\frac{1}{5}$...

$\hookrightarrow$ Cette question ne doit pas poser de problème. La définition de la fréquence de coupure d'un filtre doit être connue.

6) Il s'agit la encore d'une question classique qui ne doit pas poser de problème si l'on étudie le comportement asymptotique du filtre pour $x \ll 1$ (à basses fréquences), $x = 1$ (à la fréquence de coupure) et $x \gg 1$ (à hautes fréquences).

> Rapport du jury 2011
>
> Les diagrammes de Bode ne se limitent pas à un diagramme en amplitude, il faut aussi représenter la différence de phase.

$\hookrightarrow$ Un diagramme de Bode doit comporter le diagramme en amplitude et celui de la différence de phase en fonction de $\log x$ où x est la pulsation réduite : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

7) Il s'agit d'une question plus délicate car elle fait appel à des notions d'analyse spectrale et à l'intérêt du développement en série de Fourier d'un signal périodique. La formule générale de décomposition d'un signal périodique de fréquence f en somme de signaux sinusoïdaux (décomposition en série de Fourier) est à connaître. Cette formule ne sera pas rappelée dans l'énoncé.

> Rapport du jury 2006
>
> Le filtrage et l'analyse de Fourier ainsi que la signification et la représentation des spectres posent problèmes aux candidats.

> Rapport du jury 2003
>
> En électrocinétique, le caractère dérivateur ou intégrateur d'un filtre, [...] l'intérêt du développement en série de Fourier et la distinction entre notion d'amplificateur opérationnel parfait et régime linéaire posent problèmes aux candidats.

$\hookrightarrow$ Il convient ici de décomposer le signal $u_e(t)$ en série de Fourier.

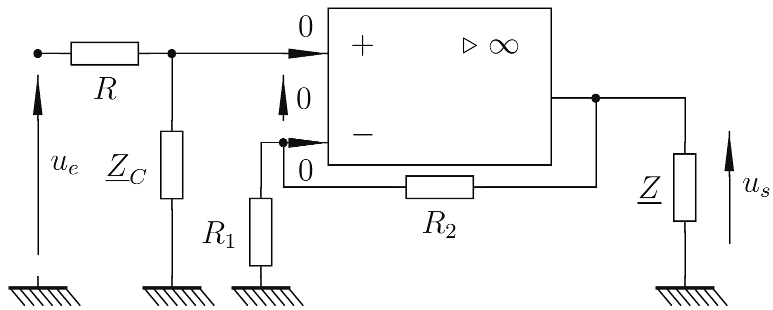
8) Pour répondre à cette question, il faut procéder comme dans la question précédente à l'aide de la décomposition en série de Fourier. Les amplitudes des différents harmoniques de $u_s(t)$ doivent être comparées entre elles pour conclure sur le signal de sortie.

$\hookrightarrow$ L'étude des amplitudes respectives des composantes du signal de sortie $u_s(t)$ permet de conclure sur le caractère sélectif ou non du filtre étudié.

<u>**Corrigé**</u>

1) Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, la présence d'une rétroaction négative (borne de sortie de l'amplificateur opérationnel reliée à l'entrée inverseuse (−)) confirme que l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire : on a donc aussi $v_+ - v_- = \varepsilon = 0$.

On complète alors la figure.



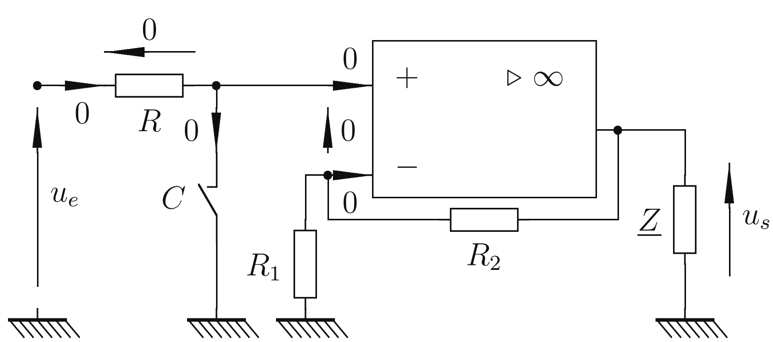
$$\boxed{\text{L'amplificateur fonctionne en régime linéaire.}}$$

2) On reconnaît un filtre passe bas du premier ordre (circuit RC avec C en sortie ouverte) de fonction de transfert $\underline{H}_{PB}$ suivi d'un amplificateur de tension non inverseur de facteur d'amplification :

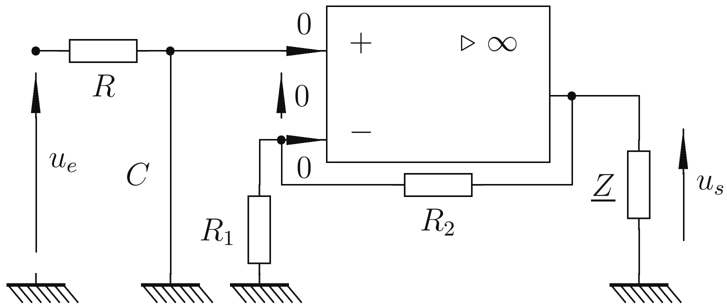
$$\boxed{A = 1 + \frac{R_2}{R_1}.}$$

Ce facteur d'amplification A est le même quelle que soit la fréquence d'où un comportement passe-bas du premier ordre.

On peut également représenter le circuit équivalent en basses fréquences (C se comporte comme un interrupteur ouvert) et en hautes fréquences (C se comporte comme un interrupteur fermé).



Montage à basses fréquences



Montage à hautes fréquences

En basses fréquences, on a $v_+ = u_e$ alors que $v_+ = 0$ en hautes fréquences.
Pour les deux montages, comme R_1 et R_2 sont traversées par le même courant, l'utilisation de la formule des ponts diviseurs de tension donne :

$$v_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s \Rightarrow u_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_-.$$

Remarque : on pouvait aussi obtenir ce résultat par utilisation de la loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse $(-)$ ou directement le théorème de Millman.
Enfin, comme $v_- = v_+$, on a :

$$u_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_+ = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_e \qquad \text{en basses fréquences.}$$

$$\text{et} \qquad u_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_+ = 0 \qquad \text{en hautes fréquences.}$$

$$\boxed{\text{Il s'agit d'un filtre passe-bas du premier ordre.}}$$

3) Comme l'amplificateur opérationnel est idéal, $I_+ = 0$ donc R et le condensateur d'impédance complexe $\underline{Z}_C$ sont traversés par le même courant d'où :

$$\underline{v}_+ = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R} \underline{u}_e = \frac{\underline{u}_e}{1 + R.\underline{Y}_C} \Rightarrow \underline{v}_+ = \frac{\underline{u}_e}{1 + jRC\omega}.$$

Par application de la loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse (ou directement le théorème de Millman) :

$$\frac{0 - \underline{v}_-}{R_1} + \frac{\underline{u}_s - \underline{v}_-}{R_2} = 0 \Rightarrow \underline{v}_- = \frac{\dfrac{0}{R_1} + \dfrac{\underline{u}_s}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{\underline{u}_s}{\dfrac{R_2}{R_1} + 1}.$$

On utilise enfin :

$$\underline{v}_+ = \underline{v}_- \Rightarrow \frac{\underline{u}_e}{1 + jRC\omega} = \frac{\underline{u}_s}{\dfrac{R_2}{R_1} + 1} \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\dfrac{R_2}{R_1} + 1}{1 + jRC\omega} = A.\underline{H}_{PB}$$

avec $A = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$ le facteur d'amplification de l'amplificateur non inverseur et $\underline{H}_{PB}$ la fonction de transfert du filtre passe-bas du premier ordre que constitue la portion RC avec C en sortie ouverte.

$$\boxed{\text{La fonction de transfert du filtre est : } \underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + jRC\omega}.}$$

4) On remarque que $\underline{H}$ ne dépend pas de l'impédance de charge $\underline{Z}$. Ce ne serait pas le cas sans la présence de l'amplificateur opérationnel. On aurait alors $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R + \underline{Z}_{\text{éq}}}$ avec $\underline{Z}_{\text{éq}}$ l'impédance équivalente à l'association parallèle $\underline{Z}$ et $\underline{Z}_C$.
L'amplificateur de tension permet d'avoir un gain statique important et en plus de garder le filtre RC en sortie ouverte.

$$\boxed{\text{La charge de sortie } \underline{Z} \text{ n'a pas d'influence sur le comportement du filtre.}}$$

5) La fréquence de coupure est f_0 telle que :

$$|\underline{H}(f_0)| = \frac{|\underline{H}_{\text{max}}|}{\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{1 + (RC\omega_0)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Les applications numériques donnent :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{100 \times 10.10^{-6}} = 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad A = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1 + \frac{9.10^3}{1.10^3} = 1 + 9 = 10.$$

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10^3}{2\pi} \approx 160 \text{ Hz.}}$$

Rapport du jury 2010

Les élèves ont du mal à déterminer sans calculatrice un ordre de grandeur. Celui-ci ne doit comporter qu'un seul chiffre significatif. Par ailleurs, nous rappelons qu'une évaluation n'est pas une fin en soi. Un commentaire physique, une critique ou un rapprochement avec une situation analogue est toujours bienvenu.

6) On pose $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite pour mettre $\underline{H}$ sous la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{A}{1 + jx}.$$

Pour tracer le diagramme de Bode, on commence par rappeler le comportement asymptotique :

- pour $x \ll 1$ (basses fréquences), $\underline{H} \simeq A$ d'où :
  $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) \simeq 20 \log A = 20$ dB et $\varphi = \arg(\underline{H}) \simeq 0$;

- pour $x = 1$ (à la pulsation de coupure), $\underline{H} = \dfrac{A}{1 + j}$ d'où :

  $G_{dB} = G_{dB,max} - 3 = 17$ dB et $\varphi = \arg(A) - \arg(1 + j) = -\dfrac{\pi}{4}$;