Le raisonnement mathématique

> *La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration : l'intuition est l'instrument de l'invention.*
>
> Henri Poincaré, *La valeur de la science*, 1905.

Le but de cette partie est la présentation de quelques types de raisonnement, fort utiles et répandus en mathématiques. Un élève de terminale, a fortiori s'il doit préparer un concours comme celui de Sciences Po, a tout intérêt à maîtriser et à savoir rapidement réinvestir ces techniques de raisonnement.

I. Le raisonnement par l'absurde

L'idée consiste à supposer que la proposition que l'on veut démontrer est fausse. Si au bout du raisonnement on aboutit à une absurdité, alors on pourra affirmer que la proposition du début (qu'on a supposée fausse) est en fait vraie.

Le lecteur non familié avec le formalisme logique pourra passer ce paragraphe.

Dans cette partie A et B désignent deux propositions (qui peuvent être *vraies* ou *fausses*). Si A est **vraie** et si l'implication $A \Rightarrow B$ est **vraie** alors B est **vraie**. Sous ces hypothèses on est en droit de déduire B.
Le raisonnement par l'absurde peut s'énoncer ainsi :
si B est **faux** et si l'implication non A $\Rightarrow B$ est **vraie** alors non A est **faux** (autrement on serait en mesure par ce qui précède de conclure que B est vraie ce qui n'est pas le cas) c'est-à-dire A est vraie.

Exemple :

Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ où $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
Rappelons qu'un nombre réel k est rationnel s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $k = \dfrac{p}{q}$.

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Par définition il existe alors $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$, que l'on peut choisir premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
D'où

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \text{ donc } p^2 = 2q^2$$

On en déduit que p^2 est pair donc que p est pair. Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$ et en utilisant que $p^2 = 2q^2$ on obtient $(2k)^2 = 2q^2$. On a donc

$$q^2 = 2k^2.$$

La dernière égalité montre que q^2 est pair et donc q est également pair. On aboutit à une absurdité puisque p et q sont supposés premiers entre eux (donc p et q ne peuvent être tous les deux pairs). On en conclut que $\sqrt{2}$ est rationnel.

II. Le raisonnement par analyse et synthèse

Un raisonnement par analyse et synthèse se déroule en deux étapes et permet de déterminer l'existence d'une solution à un problème donné. Au cours de la première étape, celle de l'analyse, on part d'une hypothétique solution, et on trouve les conditions qu'une telle solution doit nécessairement satisfaire.
La seconde étape, celle de la synthèse, consiste à s'assurer que les objets vérifiant les conditions nécessaires dégagées dans l'étape de l'analyse sont

effectivement des solutions. Autrement dit, on vérifie que les conditions nécessaires sont en fait suffisantes pour l'obtention d'une solution.

Exemple :

Prouver que toute fonction réelle se décompose de façon unique en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Rappel :

• f est une fonction paire si et seulement si pour tout élément x de son ensemble de définition $f(-x) = f(x)$.
• f est une fonction impaire si et seulement si pour tout élément x de son ensemble de définition $f(-x) = -f(x)$.

• Etape de l'analyse :

Soit f une fonction réelle. Supposons que la fonction f se décompose en somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h. Pour tout x dans l'ensemble de définition de f on a $f(x) = g(x) + h(x)$.
Remarquons alors que $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ puisque g et h sont respectivement des fonctions paire et impaire.
Par conséquent on a

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Autrement dit g et h sont uniques. Elles sont uniquement déterminées par la fonction f.
L'étape de l'analyse nous permet donc de dire que, étant donnée une fonction f, si de telles fonctions g et h existent alors elles sont nécessairement de la forme ci-dessus.

L'étape de la synthèse va donc consister à vérifier qu'étant donnée une fonction f les fonctions $g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ qui sont les candidats dégagés dans l'étape de l'analyse sont respectivement paire et impaire et elles ont pour somme la fonction f.

• Etape de la synthèse :

Soit une fonction f. Posons

$$g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Vérifions que g est paire et h impaire. Soit x dans l'ensemble de définition de f (qui est aussi celui de g et h) :

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$$

et

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$$

Donc les fonctions g et h sont respectivement paire et impaire. De plus, pour tout élément x dans l'ensemble de définition de f, on a :

$$\begin{aligned} g(x)+h(x) &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} \\ &= \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On conclut donc que toute fonction réelle s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

III. Le raisonnement par récurrence

A titre propédeutique considérons la situation suivante : dans votre immeuble votre voisin Gérard a la grippe et vous savez par ailleurs que si quelqu'un dans votre immeuble a la grippe alors son voisin l'a également. Vous êtes donc légitimement amené à conclure que toutes les personnes de l'étage de Gérard ont la grippe. Toutes proportions gardées car il ne s'agit là que d'une analogie, lorsque l'on remplace vos voisins par les entiers naturels on obtient le raisonnement par récurrence. Cette analogie doit vous faire prendre conscience que le raisonnement par récurrence est un procédé simple et intuitif. Plus formellement nous avons le principe suivant :

Principe de récurrence :

Soit n_0 un entier naturel. Pour tout $n \geq n_0$ notons $P(n)$ une certaine propriété de l'entier n. Si les hypothèse suivantes sont vérifiées :

$*$ Initialisation : $P(n_0)$ est vraie, c'est-à-dire la propriété est vraie pour l'entier n_0.

$*$ Hérédité : Si $P(n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors on peut conclure, par le principe de récurrence :
$*$ Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Remarque :

Notez que le raisonnement par récurrence ne peut s'appliquer que pour des propriétés qui dépendent d'**un entier naturel**.

Exemple : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va démontrer la propriété $P(n)$: $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Pour cela nous allons procéder en deux étapes puisqu'il faut démontrer l'*Initialisation* et l'*héridité* pour pouvoir invoquer le principe de récurrence.

$*$ Initialisation :

Pour $n = 0$ les deux membres de l'égalité valent 0 donc $P(0)$ est vraie.

$*$ Hérédité :

Supposons la propriété vraie pour un $n \geq 0$, c'est-à-dire supposons $P(n)$:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

et montrons $P(n+1)$. On a, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{(n+1)+1}{2}\right) \end{aligned}$$

$*$ Conclusion : Par le théorème de récurrence on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.