Préambule : quantificateurs, implication et équivalence

Nous allons dans ce préambule présenter quelques symboles (les quantificateurs) et quelques notions basées sur celles, parfois abordées au lycée, d'implication et d'équivalence. Le contenu de ce préambule sera utilisé à de très nombreuses reprises dans toute la suite du livre, car il permet souvent de parvenir à plus de clarté et plus de rigueur dans les raisonnements. Ces notations et ces notions sont incontournables, l'habitude de les utiliser viendra progressivement.

0.1 Quantificateurs

0.1.1 Définitions

Les quantificateurs sont des symboles permettant d'écrire des phrases de manière plus synthétique, plus simple à lire et à écrire (avec un peu d'habitude).

- $\forall$: ce symbole signifie "quel que soit". On l'appelle quantificateur universel. Par exemple,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$$
se traduit en français par : quel que soit le nombre réel x, on a toujours $f(x) \geq 0$.
- $\exists$: ce symbole signifie "il existe". On l'appelle quantificateur existentiel. Par exemple,
$$\exists x \in \mathbb{R}\ /\ f(x) \geq 0$$
se traduit en français par : il existe un nombre réel x tel que $f(x) \geq 0$.
La barre / n'est pas indispensable mais facilite la lecture en rappelant le "tel que".
Soit y un réel positif. Si l'on veut écrire que y a une racine carrée positive, on peut écrire :
$$\exists x \in \mathbb{R}\ /\ \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

0.1.2 Phrases contenant plusieurs quantificateurs

Une "phrase" peut contenir plusieurs quantificateurs ; la compréhension au premier coup d'oeil devient alors plus délicate.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ /\ f(y) \geq x$$

signifie que pour tout réel x, on peut trouver un réel y tel que $f(y) \geq x$.

Interversion :

- Quantificateurs identiques : en réfléchissant au sens de la phrase, on s'aperçoit aisément que l'on peut intervertir deux quantificateurs $\exists$ consécutifs, ou deux quantificateurs $\forall$ consécutifs. Par exemple,

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) \geq g(y)$$

  a exactement le même sens que

  $$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq g(y)$$

- Quantificateurs différents : en revanche, l'inversion d'un quantificateur $\exists$ et d'un quantificateur $\forall$ change le sens de la phrase. Un exemple permet de s'en convaincre :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ /\ y \geq x$$

  Cette phrase est de toute évidence vraie (quel que soit le nombre réel x, il existe toujours un réel qui lui est supérieur (par exemple $y = x + 1$)). Intervertissons les deux quantificateurs :

  $$\exists y \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ y \geq x$$

  Il existe un nombre réel supérieur à tous les autres (ce qui est bien évidemment faux).

0.2 Implication et équivalence

Une démonstration mathématique consiste, à partir d'hypothèses, à parvenir à la conclusion cherchée, en utilisant les règles de déduction logique. Pour éviter d'avoir un texte lourd reproduisant littéralement ces déductions logiques ("si telle propriété est vraie, alors..."), on utilise des symboles qui clarifient aussi bien la rédaction que le raisonnement lui-même.

0.2.1 Implication

Définition

L'implication correspond au raisonnement logique classique "si ... alors ...". Plus précisément, dire que la proposition "P implique Q" est vraie, c'est dire que si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie.

On utilise le symbole $\Rightarrow$ qui signifie "implique". Ainsi, "$P \Rightarrow Q$" se lit "P implique Q".

Regardons tout de suite un exemple. Si x et y sont deux nombres réels, alors la proposition suivante est vraie :

$$\underbrace{(x > y > 0)}_{P} \Rightarrow \underbrace{(x^2 > y^2)}_{Q}$$

En effet, si les réels x et y sont tels que P est vraie (c'est-à-dire si $x > y > 0$), alors nécessairement Q est vraie (c'est-à-dire $x^2 > y^2$).

En revanche, la proposition suivante est fausse :

$$\underbrace{(x^2 = y^2)}_{P} \Rightarrow \underbrace{(x = y)}_{Q}$$

Il existe en effet des nombres réels x et y pour lesquels P est vraie (c'est-à-dire $x^2 = y^2$) mais pour lesquels Q est fausse, par exemple $x = 1$ et $y =$ -1. La proposition "P implique Q" est alors fausse car on ne peut pas dire que si P est vraie alors Q est nécessairement vraie.

Contraposée d'une implication

On note *non* P la négation logique de la proposition P. *non* P est vraie quand P est fausse, et *non* P est fausse quand P est vraie. Par exemple :

- la négation de la proposition "toutes les lampes de la maison sont éteintes" est la proposition "au moins une des lampes de la maison est allumée".
- si x est un nombre réel, la négation de la proposition $x > 0$ est $x \leq 0$.

Par définition, la contraposée de la proposition "$P \Rightarrow Q$" est la proposition "*non* $Q \Rightarrow$ *non* P". Ces deux propositions sont en réalité identiques : si l'une des deux est vraie alors l'autre l'est aussi. Donnons deux exemples :

- Proposition P : "il pleut".
  Proposition Q : "la pelouse est mouillée".
  La proposition "$P \Rightarrow Q$" est vraie : quand il pleut, la pelouse est mouillée. La contraposée de cette proposition est "*non* Q implique *non* P", elle est vraie car "si la pelouse n'est pas mouillée, c'est qu'il ne pleut pas" (précisément car d'après ce que l'on vient de dire, s'il pleuvait, la pelouse serait mouillée). Cela revient bien à dire la même chose.

On peut remarquer que la proposition "Q implique P", que l'on appelle la réciproque, est ici fausse. En effet, la pelouse peut être mouillée sans qu'il ne pleuve (si on l'arrose par exemple).

– Proposition P : $x = y$ (où x et y sont des nombres réels).
  Proposition Q : $x^2 = y^2$.
  Ici aussi, "$P \Rightarrow Q$" est vraie. Dire que la contraposée de cette implication est vraie, c'est dire que : "si x^2 et y^2 sont différents, alors x et y sont différents". Dans cet exemple encore, la réciproque "Q implique P" est fausse (deux nombres différents peuvent avoir même carré).

Ainsi, montrer que "$P \Rightarrow Q$" est vraie revient rigoureusement à montrer que "*non* $Q \Rightarrow$ *non* P" est vraie. Dans certains problèmes, il peut apparaître plus simple de démontrer la contraposée d'une implication plutôt que de montrer directement cette implication.

0.2.2 Equivalence

Définition

La proposition "P équivaut à Q" est vraie quand les deux implications "P implique Q" et "Q implique P" sont vraies, c'est-à-dire que :

– si P est vraie, alors Q est vraie,
– si Q est vraie, alors P est vraie.

En formulant autrement, cela revient à dire que P et Q sont simultanément vraies ou P et Q sont simultanément fausses, ou encore que P est vraie si et seulement si Q est vraie.

On utilise le symbole $\Leftrightarrow$ qui signifie "équivaut à". On remarquera que ce symbole est naturel car il signifie bien $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$.

Exemple :

La proposition suivante est vraie (x étant un nombre réel) :

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \textit{ ou } x = 2)$$

En effet, si $x^2 - 3x + 2 = 0$, alors $(x - 1)(x - 2) = 0$, et donc $x = 1$ ou $x = 2$. Cela signifie donc que la proposition suivante est vraie :

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x = 1 \textit{ ou } x = 2)$$

Réciproquement, si $x = 1$, alors $x^2 - 3x + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, et si $x = 2$, alors $x^2 - 3x + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$. Donc la proposition suivante est également vraie :

$$(x = 1 \textit{ ou } x = 2) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

On a finalement : $(x = 1$ *ou* $x = 2)$ si et seulement si $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ainsi, comme nous l'avons fait dans cet exemple, pour démontrer que deux propositions P et Q sont équivalentes, on sera souvent amené à montrer successivement l'implication dans le sens direct ("P implique Q") et la réciproque ("Q implique P").

Vocabulaire

Soient P et Q deux propositions.
Lorsque "P implique Q" est vraie, on dit que :

- Q est une condition nécessaire pour que P soit vraie. Elle est nécessaire dans le sens où si elle était fausse, alors P serait également fausse.
- P est une condition suffisante pour que Q soit vraie. Elle est suffisante dans le sens où dès qu'elle est vérifiée, Q l'est aussi.

Lorsque P et Q sont équivalentes, on dit aussi, et cela se déduit des deux points précédents, que P est vraie à la condition nécessaire et suffisante (CNS en abrégé) que Q soit vraie.

0.3 Quelques exercices

Voici quelques exercices d'application pour se familiariser avec le contenu de ce préambule.

Exercice 1

Soit (U_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Traduire par des phrases quantifiées les propriétés suivantes :

1. La suite (U_n) est croissante.
2. La suite (U_n) est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite (U_n) est périodique.
4. La suite (U_n) est périodique à partir d'un certain rang.

Correction

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq U_{n+1}$
   (Pour tout entier naturel n, U_n est inférieur (ou égal) à U_{n+1}).
2. $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N,\ U_n \leq U_{n+1}$
   (Il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier n supérieur à N, U_n est inférieur à U_{n+1}).
3. $\exists k \in \mathbb{N}^* \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+k} = U_n$
   (Il existe un entier naturel k non nul (qui est alors une période) tel que, pour tout entier n, U_{n+k} égale U_n).
4. $\exists N \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}^* \ / \ \forall n \geq N,\ U_{n+k} = U_n$
   (Il existe un entier naturel N et un entier naturel k non nul tels que, pour tout n supérieur à N, U_{n+k} égale U_n).

Exercice 2

Ecrire les négations logiques des assertions suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(x+1) \leq 0$
2. $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ U_n = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \geq x\ /\ f(y) \geq f(x)$
4. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ (n \geq p \Rightarrow U_n \geq U_p)$

Correction

1. Dire que (pour tout réel x, $f(x)f(x+1) \leq 0$) est fausse, cela revient à dire qu'il existe un réel x tel que $f(x)f(x+1) > 0$.
   La négation est donc :
   $$\exists x \in \mathbb{R}\ /\ f(x)f(x+1) > 0$$
2. En raisonnant de même, nier le fait qu'il existe un entier n tel que $U_n = 0$ revient à dire que tous les termes de la suite sont non nuls :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \neq 0$$
3. Dire que (pour tout réel x, il existe un réel y supérieur ou égal à x tel que $f(y) \geq f(x)$) est fausse, c'est dire qu'il existe un réel x tel que, quel que soit le réel y supérieur ou égal à x, on ait $f(y) < f(x)$.
   La réponse est donc :
   $$\exists x \in \mathbb{R}\ /\ \forall y \geq x,\ f(y) < f(x)$$
4. Nier cette proposition, c'est dire qu'il existe un couple (n,p) tel que $n \geq p$ mais $U_n < U_p$:
   $$\exists (n,p) \in \mathbb{N}^2\ /\ (n \geq p\ et\ U_n < U_p)$$

Remarque : on peut s'apercevoir qu'il a fallu à chaque fois intervertir les symboles "il existe" et "quel que soit".

Exercice 3

Soient E un ensemble, $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments x de E (P et Q sont vraies pour certaines valeurs de x, et fausses sinon (par exemple, $P(x)$ peut être, pour x réel, la propriété $x > 0$)).

1. Y-a-t-il des relations d'implication ou d'équivalence entre les deux propositions suivantes ? (donner un contre-exemple si l'implication est fausse)
   $$\Big(\forall x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x))\Big) \text{ et } \Big((\forall x \in E,\ P(x))\ ou\ (\forall x \in E,\ Q(x))\Big)$$
2. Même question avec :
   $$\Big(\exists x \in E\ /\ (P(x)\ et\ Q(x))\Big) \text{ et } \Big((\exists x \in E\ /\ P(x))\ et\ (\exists x \in E\ /\ Q(x))\Big)$$

Correction

1. Il faut "traduire en français" les propositions pour comprendre ce qu'elles signifient, et l'on se rend compte alors que la deuxième implique la première, mais que l'on n'a pas l'autre implication.

   Montrons d'abord que :

   $$\Big(\forall x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x))\Big) \ \Leftarrow\ \Big((\forall x \in E,\ P(x))\ ou\ (\forall x \in E,\ Q(x))\Big)$$

   Supposons pour cela que $\Big((\forall x \in E,\ P(x))\ ou\ (\forall x \in E,\ Q(x))\Big)$ soit vraie. Cela signifie soit que pour tout x de E, $P(x)$ est vraie, soit que pour tout x de E, $Q(x)$ est vraie.
   Par exemple, si $P(x)$ est vraie pour tout x, alors $(P(x)\ ou\ Q(x))$ est évidemment vraie pour tout x de E. Ainsi, on a donc bien :

   $$\Big(\forall x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x))\Big)$$

   (on ferait un raisonnement analogue si c'était $Q(x)$ qui était vraie pour tout x de E). L'implication est ainsi démontrée.

   Montrons maintenant que l'on n'a pas l'autre implication. Par exemple, considérons pour E l'ensemble des réels. Choisissons pour P la proposition $(x < 2)$, et $(x > 0)$ pour Q. Tout nombre réel est soit strictement positif (auquel cas Q est vraie), soit strictement inférieur à 2 (auquel cas P est vraie) ; il peut même être les deux, auquel cas P et Q sont vraies toutes les deux. Ce qui signifie :

   $$\Big(\forall x \in \mathbb{R},\ (P(x)\ ou\ Q(x))\Big)$$

   Or il existe des nombres réels supérieurs à deux, donc il est faux d'écrire :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)$$

   De même, il existe des nombres réels négatifs, donc il est faux d'écrire :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x)$$

   Ainsi :

   $$\Big((\forall x \in \mathbb{R},\ P(x))\ ou\ (\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x))\Big)$$

   est fausse. Nous avons donc trouvé un contre-exemple, ce qui prouve que la deuxième proposition n'entraîne pas la première.

2. Ici, on va montrer que la première proposition implique la seconde, et que la réciproque est fausse.

   Montrons que :

   $$\Big(\exists x \in E \ / \ (P(x) \ et \ Q(x))\Big) \ \Rightarrow \ \Big(\exists x \in E \ / \ P(x) \ et \ \exists x \in E \ / \ Q(x)\Big)$$

   En effet, s'il existe un élément x de E tel que $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies, alors en choisissant un tel élément x :
   – $P(x)$ est vraie, et donc :

   $$\exists x \in E \ / \ P(x)$$

   – $Q(x)$ est vraie et donc :

   $$\exists x \in E \ / \ Q(x)$$

   La deuxième proposition est alors vraie, l'implication est démontrée.

   La réciproque est en revanche fausse : choisissons par exemple l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour P la propriété "la fonction est strictement croissante", pour Q "la fonction est strictement décroissante". Il existe bien entendu des fonctions strictement croissantes et des fonctions strictement décroissantes, mais aucune fonction ne peut être à la fois strictement croissante et strictement décroissante.