

Sommaire

I	Espaces probabilisés	11
I.1	Expérience aléatoire et univers	11
I.2	Événements	12
I.3	Probabilité	14
I.4	Probabilité conditionnelle	21
I.5	Formule des probabilités totales	22
I.6	Formule de Bayes	24
I.7	Indépendance de deux événements	25
I.8	Indépendance de n événements	26
I.9	Énoncé des exercices	27
I.10	Correction des exercices	30
II	Variables aléatoires : généralités	39
II.1	Définition	39
II.2	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	40
II.3	Fonction de répartition	41
II.4	Vecteurs aléatoires	44
II.5	Énoncé des exercices	45
II.6	Correction des exercices	46
III	Variables aléatoires discrètes	53
III.1	Définition	53
III.2	Loi de probabilité	53
III.3	Fonction de répartition	55
III.4	Espérance	55
III.5	Composition par une fonction	59
III.6	Variance et écart-type	60
III.7	Énoncé des exercices	63
III.8	Correction des exercices	66
IV	Lois discrètes usuelles	77
IV.1	Loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$	77
IV.2	Loi de Bernoulli	78
IV.3	Loi binomiale	78
IV.4	Loi hypergéométrique	80

IV.5 Loi géométrique	82
IV.6 Loi de Poisson	83
IV.7 Fonction génératrice	84
IV.8 Énoncé des exercices	89
IV.9 Correction des exercices	91
V Vecteurs aléatoires discrets	97
V.1 Loi de probabilité	97
V.2 Lois marginales	99
V.3 Lois conditionnelles	100
V.4 Indépendance de 2 variables aléatoires réelles	101
V.5 Espérance du produit de 2 variables aléatoires	101
V.6 Indépendance de n variables aléatoires réelles	102
V.7 Somme de n variables aléatoires	103
V.8 Covariance et coefficient de corrélation linéaire	105
V.9 Somme de variables de Bernoulli indépendantes	106
V.10 Somme de variables binomiales indépendantes	107
V.11 Somme de variables de Poisson indépendantes	108
V.12 Énoncé des exercices	109
V.13 Correction des exercices	110
VI Variables aléatoires à densité	119
VI.1 Généralités	119
VI.2 Espérance et variance d'une v.a.r. à densité	122
VI.3 Loi uniforme sur $[a; b]$	125
VI.4 Loi exponentielle	126
VI.5 Loi normale, ou loi de (Laplace-)Gauss	127
VI.6 Énoncé des exercices	130
VI.7 Correction des exercices	132
VII Vecteurs aléatoires à densité	141
VII.1 Généralités en dimension 2	141
VII.2 Indépendance de 2 variables à densité	142
VII.3 Densité d'une somme de 2 variables à densité	144
VII.4 Vecteur aléatoire à densité en dimension p	144
VII.5 Indépendance de p variables à densité	145
VII.6 Covariance et coefficient de corrélation	146
VII.7 Espérance et variance d'une somme de p variables à densité	147

VII.8 Loi normale en dimension 2	147
VII.9 Loi normale en dimension p	151
VII.10 Énoncé des exercices	152
VII.11 Correction des exercices	153
VIII Suites de variables aléatoires	159
VIII.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	159
VIII.2 Convergence en probabilité	160
VIII.3 Convergence en loi	161
VIII.4 Convergence presque sûre	164
VIII.5 Énoncé des exercices	165
VIII.6 Correction des exercices	167
IX Leçons d'oral (CAPES Externe)	173
IX.1 Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations	174
IX.2 Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, for- mule du binôme. Applications	179
IX.3 Description mathématique d'une expérience aléatoire : en- semble des événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini)	186
IX.4 Probabilité conditionnelle ; indépendance de 2 événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilité	193
IX.5 Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des va- leurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples	199
IX.6 Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples	206
IX.7 Séries statistiques à deux variables numériques. Nuage de points associé. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice	210
IX.8 Compléments sur les statistiques doubles	215
Annexe 1	218
Annexe 2	220