Chapitre I
Les signaux échantillonnés

1. Définitions

L'échantillonnage d'un signal x(t) consiste à en prélever des valeurs à intervalle régulier (figure1). Le temps **Ts** séparant deux échantillons successifs est appelé **période d'échantillonnage (*Sample period*),** exprimé en secondes**.** On définit la fréquence $Fs = \frac{1}{Ts}$, comme étant la **fréquence d'échantillonnage (*sample frequency*)** exprimée en Hz**.**

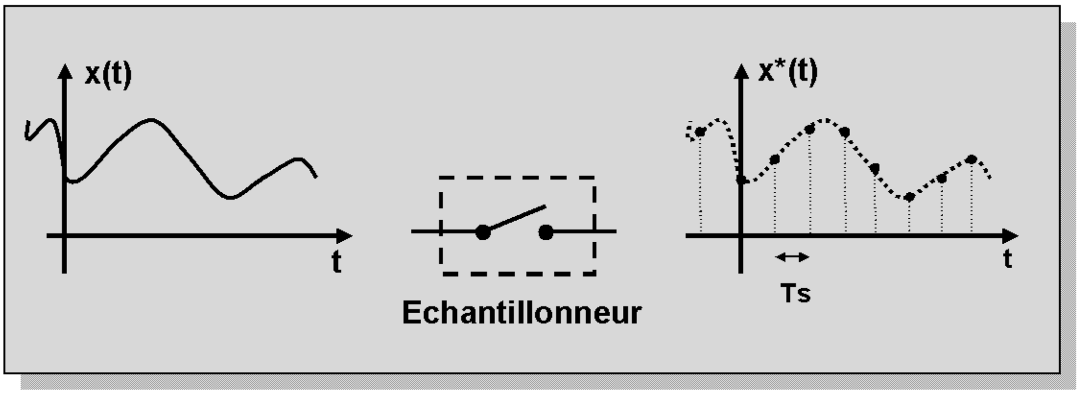


Figure 1 : Echantillonnage d'un signal analogique

Dans les systèmes de traitement numérique, cette cadence d'acquisition (**Sample Rate** ou **Troughput-Rate** suivant les constructeurs) est exprimée en nombre d'échantillons par seconde **(*Sa/s : Samples per Second*)**. Un choix correct de la fréquence d'échantillonnage **Fs** conditionne le bon fonctionnement de l'ensemble de la chaîne de traitement. Ce sont les propriétés spectrales du signal échantillonné qui permettent de choisir correctement **Fs**.

Exemple: un système de traitement affiché 1MSPS peut, en théorie, convertir un million d'échantillons en une seconde. Il peut donc être utilisé pour l'acquisition d'un signal échantillonné avec une période d'échantillonnage $Ts = 1\mu s$, soit $Fs = 1Mhz$.

2. Spectre d'un signal échntillonné

On considère un signal analogique **x(t)** possédant un spectre **X(f)** s'étendant de 0 à **Fmax**. On l'échantillonne à la fréquence **Fs** pour former le signal échantillonné **x*(t)** (figure 2).

Soit **X*(f),** le spectre de **x(t),** on peut démontrer alors que **X*(f)** est **périodique de période Fs**. Le spectre **X*(f)** est composé de motifs **semblables au spectre X(f)** se reproduisant tous les **Fs**. Il est possible à priori de restituer **x(t)** à partir de **x*(t)** en supprimant les composantes spectrales centrées sur les fréquences **Fs**, **2Fs**,…., **nFs** par filtrage passe bas par exemple.

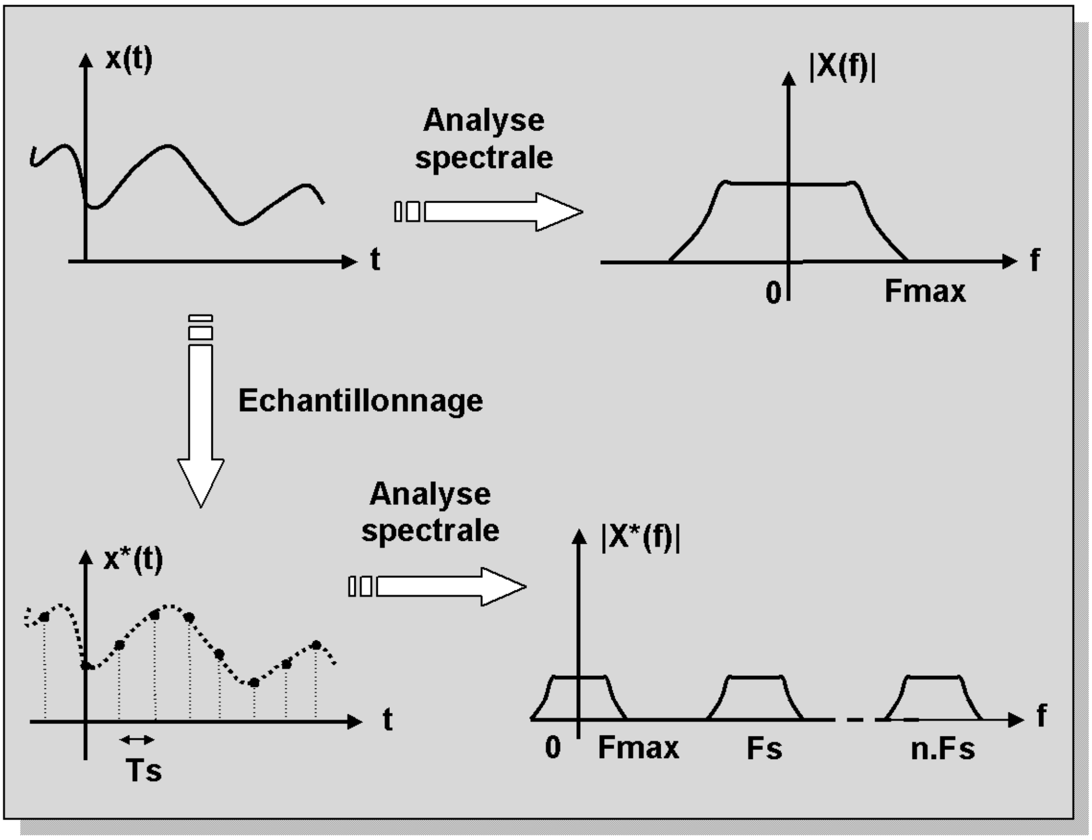
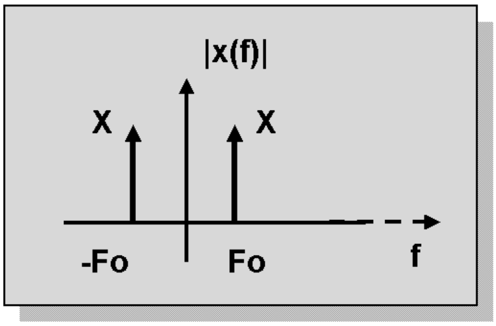


Figure 2 : spectre d'un signal échantillonné

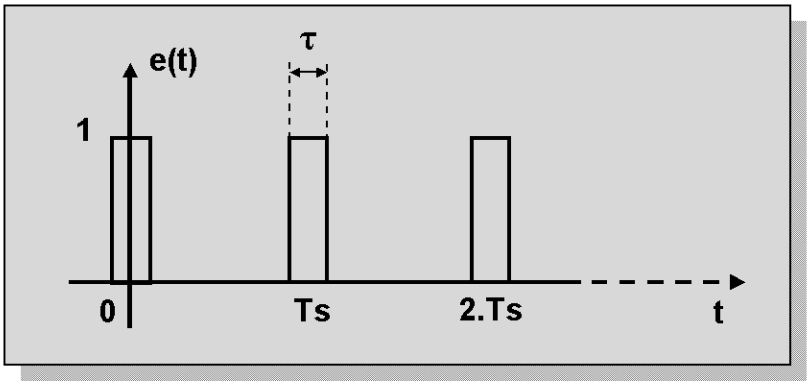
L'étude des signaux échantillonnés s'effectue au moyen d'outils mathématiques relativement complexes (produits de convolution, théorie des distributions). Toutefois, dans le cas où le signal à échantillonner est périodique, cette étude peut-être menée simplement. Considérons un signal sinusoïdal défini par :

$$x(t)=X.\sin(2\pi f_o t)= X.\sin(\omega_o t)$$

Le module du spectre de x(t), noté |x(f)| est représenté sur la figure suivante



L'opération d'échantillonnage peut être vue comme la multiplication de x(t) avec le signal e(t) suivant :



L'échantillonnage est d'autant meilleur que τ est petit.

Le signal e(t) est périodique, de période Ts et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, il peut donc s'exprimer sous forme d'une série de Fourier d'expression :

$$e(t) = E_o + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos n\omega_s t \quad \text{avec } \omega_s = \frac{2\pi}{Ts}$$

Le signal échantillonné x*(t) = x(t) × e(t) s'écrit donc

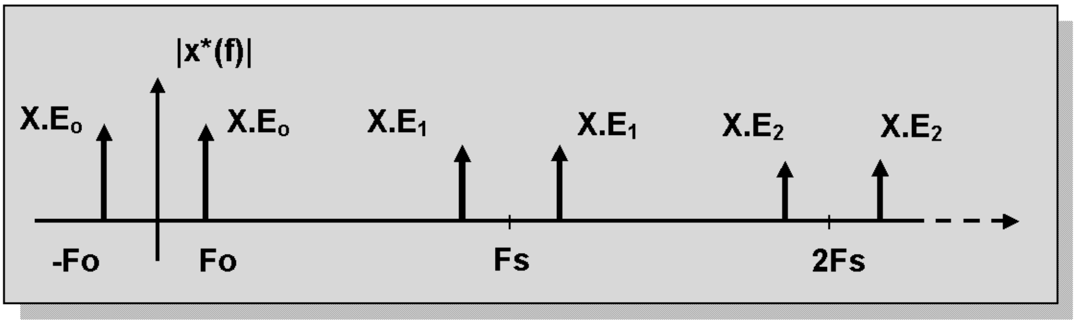
$$x^*(t) = x(t) \times e(t) = X \sin(\omega_o t) \times \left[E_o + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos n\omega_s t\right],$$

Soit

$$x^*(t) = X.E_o \sin(\omega_o t) + \sum_{n=1}^{\infty} X.E_n \sin(\omega_o t) \cos n\omega_s t$$

$$x^*(t) = X.E_o \sin(\omega_o t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{X.E_n}{2}\sin(n\omega_s + \omega_o)t + \frac{X.E_n}{2}\sin(n\omega_s \quad \omega_o)t\right]$$

Le module du spectre de x*(t), noté |x*(f)| est représenté sur la figure suivante



Le spectre du signal d'entrée, centré sur 0, est conservé avec une modification de son amplitude (multiplication par E_o). De plus, on retrouve les mêmes composantes centrées sur la fréquence d'échantillonnage Fs et ses multiples. On en déduit que lorsque ce signal sinusoïdal est échantillonné à la fréquence Fs, son spectre devient périodique de période Fs. On remarque par ailleurs que les motifs apparaissant autour des fréquences Fs, 2Fs, etc, ne sont pas d'amplitude X. Leurs amplitudes sont modifiées à cause de la largeur τ de l'impulsion. En théorie, pour τ=0, on obtiendrait une reproduction du spectre de x(t) avec conservation de l'amplitude X.

3. Condition de restitution du signal x(t) à partir de x*(t)

3.1 Condition de Shannon

Le signal analogique **x(t)** peut effectivement être recomposé à partir de **x*(t)** en appliquant un filtre passe bas de sélectivité suffisante et possédant une fréquence de coupure correctement choisie (figure3).
Toutefois cette restitution n'est possible que si les « motifs » identiques se trouvent séparés d'une « distance » suffisante pour permettre l'utilisation d'un tel filtre. Sur la figure 4, est représenté le spectre du signal échantillonné **x*(t)** dans le cas où **Fs** est trop faible. Dans ce cas les différents motifs se mélangent et on parle alors de **repliement de spectre** (***Aliasing***). Il est clair, que dans ce cas, aucun filtre ne pourra restituer **x(t)** à partir de **x*(t)**. Le signal est irrémédiablement détérioré ce qui entachera d'erreurs l'ensemble des traitements qui seront effectués en aval.

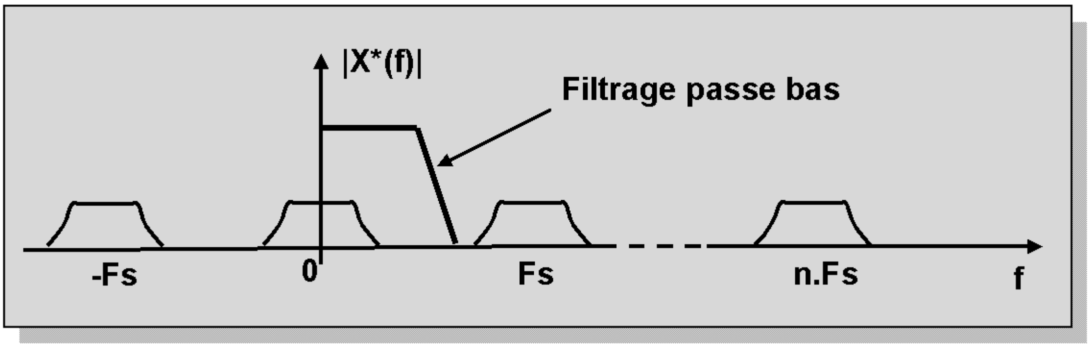


Figure 3 : Restitution par filtrage passe-bas

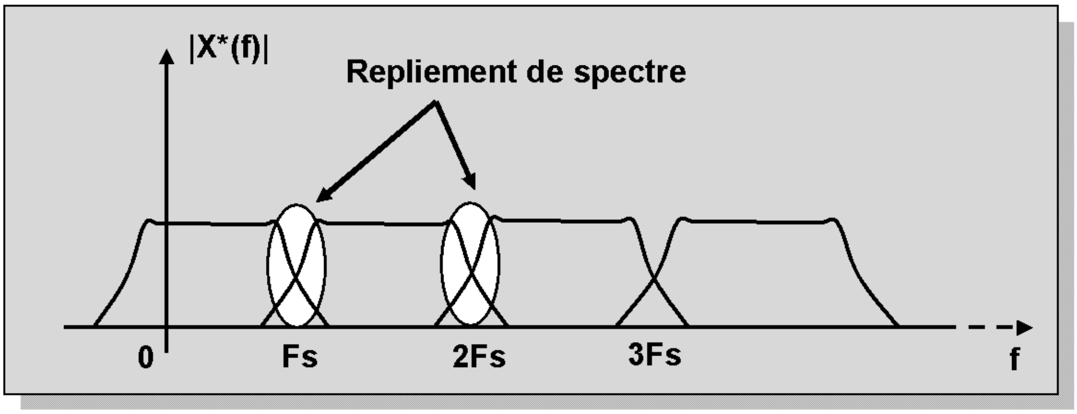


Figure 4 : Repliement de spectre

La situation limite est représentée sur la figure 5. Dans ce cas extrême, on a Fmax=Fs –Fmax soit Fs=2 Fmax.

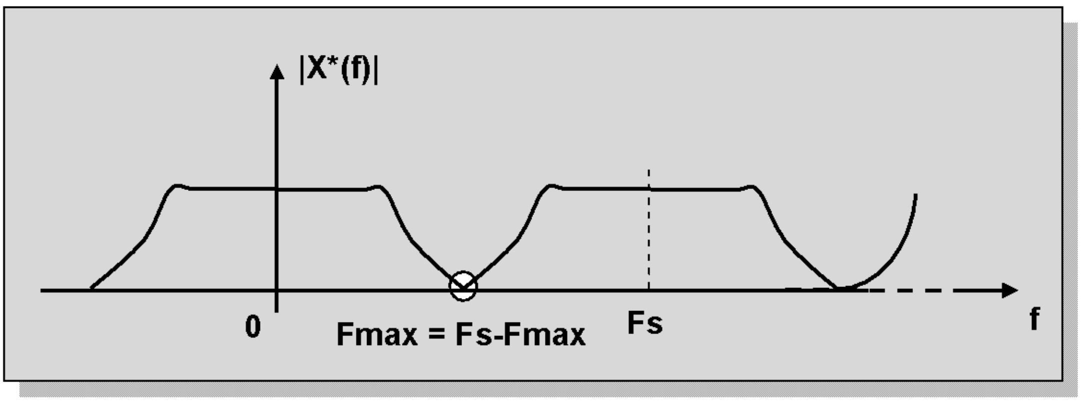


Figure 5 : Limite d'échantillonnage correct

Cette limite théorique est connue sous le nom de **condition de Shannon** ou **limite de Nyquist**. En pratique, cette condition conduit à un critère de choix sur la fréquence **Fs** :

$$Fs \geq 2F\max$$

soit

$$F\max \leq \frac{Fs}{2}$$

Pour effectuer un échantillonnage correct, on peut donc soit augmenter **Fs** soit diminuer **Fmax** de telle sorte que cette condition soit respectée. Lorsque le spectre du signal dépasse $\frac{Fs}{2}$ on parle alors de sous-échantillonnage (***undersampling***).

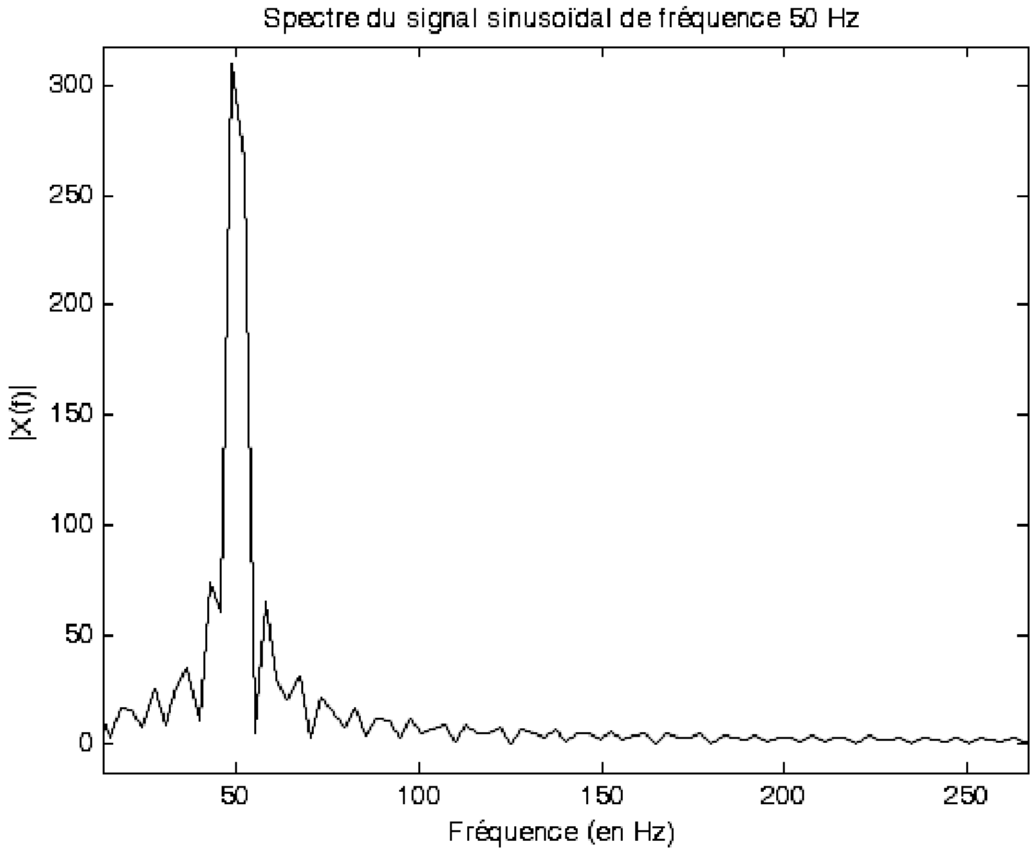
3.2 Exemple en simulation

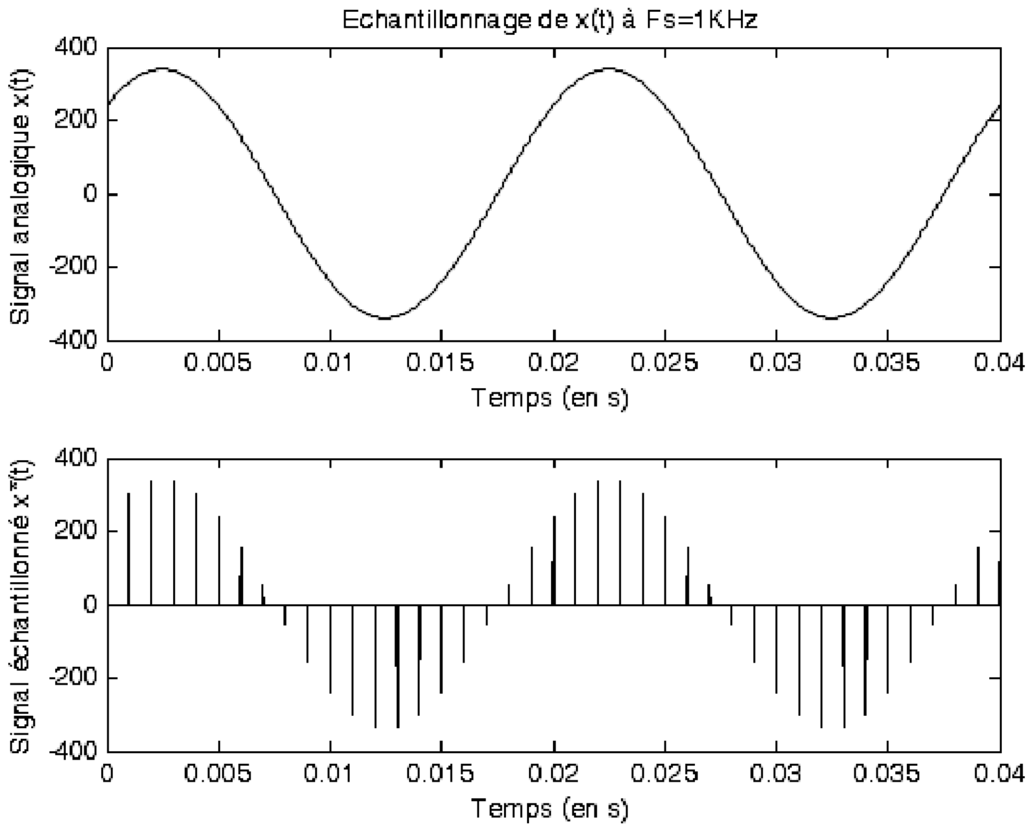
L'étude de l'échantillonnage des signaux par la simulation doit être menée avec précaution. En effet, en simulation les signaux analogiques n'existent pas. On peut tout au plus créer de pseudos signaux analogiques en les simulant avec un pas de calcul le plus faible possible. Les opérations d'échantillonnage opérées sur ces pseudos signaux devront alors être effectuées une période d'échantillonnage beaucoup plus grande que ce pas de calcul. Les exemples sont simulés à l'aide de MATLAB/SIMULINK. Les pseudos signaux analogiques sont simulés avec un pas de calcul égal à $\Delta T=1\,\mu s$.

Reprenons le cas du signal sinusoïdal $x(t) = X.\sin(\omega_o t)$. La limite de Shannon signifie dans ce cas que l'on peut reconstruire x(t) à partir de seulement deux échantillons par période $T_o=1/F_o$. Bien que surprenante, cette affirmation peut être vérifiée en simulation. Considérons un signal sinusoïdal de fréquence F_o=50Hz et de valeur efficace égale à 240. Le spectre de ce signal est donné sur la figure suivante.

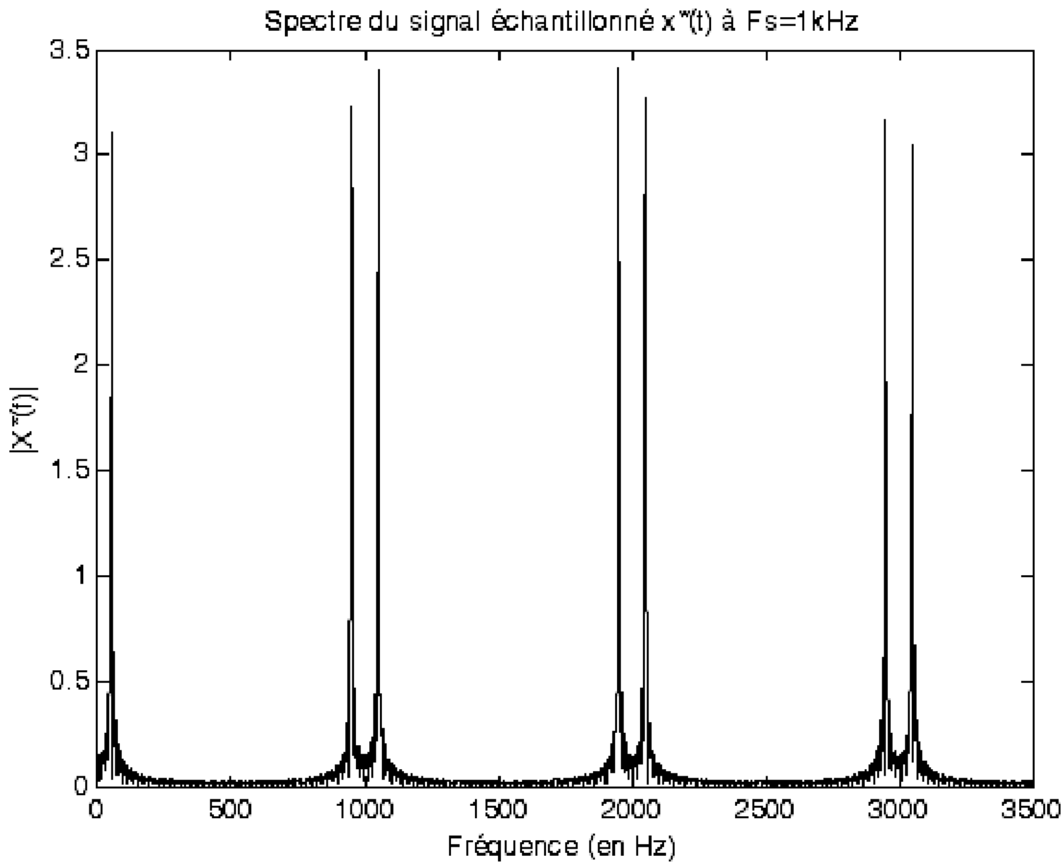
On échantillonne ce signal avec une fréquence d'échantillonnage respectant largement la condition de Shannon :

$$Fs=1Khz >> 2\ Fmax=100Hz$$


Spectre du signal sinusoïdal de fréquence 50 Hz
|X(f)|
Fréquence (en Hz)
300
250
200
150
100
50
0
50
100
150
200
250


Echantillonnage de x(t) à Fs=1KHz
Signal analogique x(t)
Temps (en s)
Signal échantillonné x*(t)
Temps (en s)
400
200
0
-200
-400
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
0.035
0.04

Le spectre du signal échantillonné est donné sur la figure suivante



On retrouve bien la périodicité du spectre dont les motifs se répètent tous les 1000 Hz. Il est possible de reconstruire x(t) à partir de x*(t) par filtrage passe bas à 500Hz par exemple.

Prenons le cas limite dans lequel Fs=2Fmax=100Hz. La figure suivante montre le signal analogique x(t) et le signal échantillonné x*(t). On obtient bien deux échantillons par période du signal analogique x(t).