I. Calculer avec les fractions et les racines

1. Calcul avec les fractions

Soient *a, b, c* et *d* des entiers relatifs, avec *b* et *d* non nuls.

Addition de même dénominateurs : $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

Simplification : $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$

Addition de dénominateurs différents $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

Multiplication : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Division : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ $(c \neq 0)$

2. Calcul avec les racines carrées

Soient *a* et *b* deux réels positifs.

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\qquad$ $\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

3. Egaler deux expressions

Nous souhaitons montrer qu'une expression A est égale à une expression B. Trois méthodes s'offrent principalement à nous :

- Effectuer la différence A − B, afin de trouver zéro.
- Partir de l'expression A et la modifier de sorte d'obtenir l'expression B (ou inversement !).
- Passer par une étape intermédiaire, consistant à égaler A avec C et C avec B. On pourra alors conclure à A = B.

II. Résoudre des équations, des inéquations

1. Mettre en équation

Lorsque nous avons un énoncé, il va falloir, pour faciliter la résolution du problème, remplacer certaines phrases par des égalités mathématiques, après s'être donné une (ou des) inconnue(s). Considérons l'énoncé ci-dessous, et « mathématisons-le », c'est-à-dire, mettons-le en équation.

Enoncé

Des amis font un repas en commun. En versant chacun 8 euros, il manque 5,25 euros pour payer la note. S'ils versent chacun 9 euros, ils ont 1,75 euros de trop. Quel est le nombre de personnes et le prix du repas ?

Etape 1 : Choix des inconnues

Comme son nom l'indique, l'inconnue est présente dans le texte, mais on ne connaît pas sa valeur. Ici, on nous pose deux questions en référence à l'énoncé. Nous allons donc choisir 2 inconnues.
Nous avons tendance à choisir des lettres « parlantes » pour les inconnues. Il nous semble plus naturel de nommer p un prix, plutôt que x.

Soit N le nombre de convives et p le prix d'un repas

Etape 2 : Mathématisation du problème

Il s'agit de reprendre le texte et de chercher les relations mathématiques liant les données. Reprenons notre exemple et cherchons à voir d'où viennent les deux équations ci-dessous.
L'énoncé évoque la note : elle s'élève à $N \times p$.
En versant chacun 8 euros, (il y a alors $8N$ dans la soucoupe) il manque 5,25 euros pour payer la note (qui vaut $N \times p$). On obtient ainsi (1).
On reprend la seconde phrase et on obtient l'équation (2).

(1) $8N + 5{,}25 = N \times p$

(2) $9N - 1{,}75 = N \times p$

Etape 3 : Résolution du système

C'est l'objet du paragraphe suivant…

2. Résoudre une équation

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs que peuvent prendre les inconnues pour rendre une égalité vraie.

Pour les équations à une inconnue

La technique consiste à isoler l'inconnue d'un côté de l'égalité. Pour cela :

- On peut ajouter un même nombre de chaque côté de l'égalité, afin de rendre l'égalité plus agréable. Ici par exemple, on choisit d'annuler les expressions en x à droite du signe « = » ; ce que nos étudiants appellent couramment « passer de l'autre côté ».
- On peut multiplier de chaque côté par un même nombre non nul.
  Il faut ensuite conclure. Pour être sûr que les nombres trouvés sont bien solutions, il faut systématiquement faire une vérification et l'écrire sur la copie.

Exercice 1

Résoudre l'équation (E) suivante : $3x + 1 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$

Corrigé 1

Appliquons l'ensemble des règles ci-dessus :

$$3x + 1 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x + 1 + \left(-\frac{5}{2}x - 1\right) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{2}x - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x \times \frac{2}{1} = -\frac{4}{3} \times \frac{2}{1} \Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}$$

On peut alors vérifier, en remplaçant x par sa valeur dans (E) que cette solution convient. L'équation admet donc une solution unique égale à $-\frac{8}{3}$.

Pour les systèmes de deux équations à deux inconnues

Il s'agit de trouver les valeurs possibles des différentes inconnues pour rendre vraies toutes les égalités à la fois. Le principe général est d'arriver à une équation à une inconnue, de la résoudre, puis de trouver toutes les solutions de proche en proche.
Il existe deux grandes méthodes :

- **Par substitution** : on choisit une des équations dans laquelle on exprime (avec les techniques ci-dessus) une inconnue en fonction des autres. On la remplace alors dans les autres équations. On recommence ce processus avec les autres équations (on ne touche plus à la première) jusqu'à avoir une équation à une inconnue, que l'on résout. Enfin, en remplaçant les inconnues par les valeurs trouvées, on trouve les solutions possibles, puis on vérifie.
- **Par combinaison linéaire** : le principe est de remplacer une équation par une combinaison linéaire non nulle des deux équations pour aboutir à une équation à une inconnue, comme dans l'exemple ci-dessous. Puis on vérifie.

Exercice 2

Résoudre le système : $\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$

Corrigé 2

Appliquons les deux méthodes vues plus haut :

Par substitution :	Par combinaison linéaire :
$\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 - 3y \\ 5(4 - 3y) + 2y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 - 3y \\ 20 - 13y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{13}{13} = 1 \\ x = 4 - 3 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 9y = 12 & (L_1) \\ 5x + 2y = 7 & (L_2) \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 9y = 12 & (L_1) \\ 15x + 45y - (15x + 6y) = 60 - 21 & (5L_1 - 3L_2) \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 39y = 39 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = \dfrac{12 - 9y}{3} = 1 \end{cases}$

III. Géométrie

1. Ecrire un programme de construction

On veut faire tracer un cercle.

On ne dit pas : *Mettre la pointe du compas en A et fais un cercle passant par B.*

Mais on dit : *Tracer le cercle de centre A passant par B.*

Puisqu'il s'agit d'une construction, il faut absolument utiliser des verbes d'actions : tracer le segment, nommer les points, etc.

Et puisque vous allez aussi enseigner le français, il faut être homogène dans votre programme : à l'infinitif, à l'impératif, au choix…

La principale difficulté est que le récepteur de votre message ne connaît pas la figure originale, donc rien dans votre programme ne doit prêter à confusion ou à ambiguïté.

Il est souvent plus prudent d'indiquer dans le programme le tracé des cercles complets (on voit ainsi combien ils ont de points d'intersection) même si concrètement on ne trace que les parties de cercles (les arcs) nécessaires.

On ne dit pas :« dessus, dessous, à droite, à gauche » (que se passe-t-il si nous tournons votre feuille ?).
Mais… « situé dans le demi-plan délimité par la droite (AB) et contenant C »
ou « ABCD écrit dans le sens des aiguilles d'une montre ».

2. Bâtir une démonstration en géométrie

La démonstration est l'outil de preuve des mathématiciens. Elle répond à des exigences bien spécifiques. Nous allons nous attarder plus précisément au domaine de la géométrie, mais ce qui suit peut s'adapter à tout domaine mathématique.
Cet exercice repose sur quatre piliers :

- une connaissance approfondie des définitions et théorèmes du cours ;
- l'analyse des données ;
- l'analyse de la conclusion ;
- un va-et-vient entre les trois points précédents : une fois démontrée, la conclusion d'une question devient une donnée pour la suite.

Il comporte aussi plusieurs phases :

- l'analyse du sujet ;
- la conception de la démonstration ;
- la rédaction de la démonstration.

Analyse du sujet

Il s'agit de bien comprendre quelles sont les données de l'énoncé. On les appelle aussi **hypothèses**. Contrairement au langage courant, l'hypothèse mathématique est une donnée de départ, fournie par l'énoncé. Il faut donc faire la liste de ces données, et éventuellement les reformuler dans un langage plus « mathématique ».

Exemples

« M appartient au cercle de centre O de rayon R » peut se traduire par « $OM = R$ »

« A' est le symétrique de A par rapport à I » se traduit par « I est milieu de [AA'] » soit encore « AI = IA' et $I \in$ [AA'] »

Il faut ensuite analyser la conclusion de la même manière et déterminer les différentes formulations possibles de ce que l'on demande de montrer.
L'analyse du sujet est donc, entre autres, un travail de traduction.

Conception de la démonstration

Une fois les données de départ et le but poursuivi analysés, il faut construire un chemin de l'un à l'autre à l'aide des théorèmes du cours. Il faut rechercher parmi ceux que vous connaissez, ceux qui demandent des hypothèses dont vous disposez, et qui vous fourniront une conclusion proche de votre but. Avec parfois des étapes intermédiaires...
La réalisation d'une figure (à main levée éventuellement), vous permettra de mieux cerner les données à votre disposition, et de synthétiser les informations. Une « figure fausse » est parfois très utile pour ne pas utiliser abusivement des informations qui ne figureraient pas dans l'énoncé.

La démonstration peut comporter plusieurs étapes, **chacune d'entre elles fournissant des conclusions, qui deviennent à leur tour des hypothèses pour la phase suivante**.
Deux grandes stratégies se dégagent : soit partir des données de l'énoncé et tenter d'aboutir à la conclusion demandée à l'aide des théorèmes et propriétés ; soit opérer par ce qu'on appelle « chaînage arrière » et partir de la conclusion. On cherche alors quelles sont les propriétés du cours pouvant mener à cette conclusion, et on examine pour chacune si on dispose des données nécessaires à son application.

Rédaction

C'est la synthèse du travail précédent. Il s'agit de trouver les mots qui montreront au lecteur le cheminement de votre raisonnement. Pour chaque théorème utilisé, il faudra faire la liste des données que vous utilisez, citer le nom du théorème s'il en possède, puis énoncer la conclusion. Il existe deux grands types de formulation.
Le premier type de démonstration est

- l'énonciation des hypothèses utiles,
- puis celle du théorème,
- puis celle de la conclusion.

Comme.......... et ....   d'après....................   on peut dire (ou « on a »)....

L'autre type de démonstration est celui « qui annonce la couleur ».

- On énonce le théorème,
- puis la conclusion
- et enfin les hypothèses.

– Par le théorème ....   – on peut dire que ....   – car ....

Comment faire...

Dans un premier temps, il vous faut apprendre à rechercher les mots inducteurs ou les hypothèses. Si l'on reconnaît des configurations particulières, cela peut permettre de reconnaître le théorème à employer.
Le triangle est rectangle ? Le théorème de Pythagore nous permet de calculer des longueurs inconnues.

3. Montrer l'alignement de trois points

Soient trois points distincts A, B et C du plan. Pour démontrer que ces points sont alignés, nous pouvons utiliser plusieurs méthodes, le choix dépendant des hypothèses supplémentaires de l'énoncé.

- On peut démontrer que C est sur la droite (AB).
- On peut calculer l'angle$\widehat{ACB}$ et voir qu'il mesure 0° ou 180°.
- On peut, si l'on connaît les longueurs AB, BC, CA, constater que ces points vérifient le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :
  si BC = BA + AC, alors A est sur le segment [BC].

- On peut utiliser les droites remarquables du triangle : peut-être que A est centre de gravité du triangle A'BC' et que C est le milieu de [A'C']. Ainsi, (BC) est une médiane du triangle et donc A, B et C sont alignés.
- On peut enfin montrer par diverses méthodes que les droites (AB) et (AC) sont parallèles. Deux parallèles ayant un point commun (ici A) sont confondues, donc A, B et C sont alignés.

4. Répondre à un « vrai ou faux »

- Pour montrer qu'une affirmation est vraie mathématiquement, il faut montrer qu'elle est toujours vraie, et donc faire une démonstration (avec des variables exprimées avec des lettres, et non pas des exemples).
- Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de montrer qu'elle est une seule fois fausse, et donc donner un exemple où l'affirmation est fausse, ce qu'on appelle un **contre-exemple.**

5. Montrer le parallélisme de deux droites du plan

- Si on dispose de mesures de longueurs, tenter la réciproque du théorème de Thalès si la configuration le permet.
- Montrer que quatre points (avec deux points sur chaque droite concernée) forment un trapèze ou un parallélogramme.
- Montrer que les deux droites sont parallèles à une même troisième.
- Montrer qu'elles forment, avec une même troisième droite, des angles égaux (dits correspondants).

6. Montrer le parallélisme de deux droites de l'espace

- Montrer qu'elles sont coplanaires, puis utiliser une des techniques précédentes.
- Montrer que ce sont des arêtes adéquates d'un cube ou d'un parallélépipède rectangle.
- Montrer que les deux droites sont orthogonales à un même plan.

7. Montrer la perpendicularité de deux droites du plan ou qu'un angle est droit

- Si on dispose de mesures d'angles, faire des calculs...
- Si on dispose de mesures de longueurs, penser à la réciproque du théorème de Pythagore.
- Si on dispose d'un triangle inscrit dans un cercle, montrer qu'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle.
- Si on dispose d'un triangle, montrer que la médiane issue d'un des sommets mesure la moitié du côté opposé (le triangle est rectangle en ce sommet).

- Montrer qu'une des droites est la hauteur d'un triangle et que l'autre droite porte le côté opposé (par exemple en montrant qu'elle passe par un sommet et par l'orthocentre).
- Montrer qu'une des droites est la médiatrice d'un segment porté par l'autre.
- Montrer que quatre points (avec deux points sur chaque droite concernée) forment un trapèze rectangle ou un rectangle.
- Montrer qu'une des droites est parallèle à une troisième droite, dont on sait qu'elle est perpendiculaire à la première.

8. Montrer l'orthogonalité de deux droites de l'espace

- Montrer que ce sont des arêtes bien choisies d'un pavé ou d'un cube.
- Montrer qu'elles sont coplanaires, et qu'elles sont perpendiculaires dans le plan qui les contient toutes les deux.
- Trouver une parallèle à la première droite qui soit coplanaire et perpendiculaire à la seconde droite.
- Trouver une parallèle à chacune des deux droites, et montrer que ces parallèles sont perpendiculaires entre elles.

9. Montrer qu'un point I est le milieu d'un segment

- Si on dispose de mesures de longueurs, faire des calculs...
- Montrer que le point I appartient au segment, et à la médiatrice du segment.
- Utiliser le théorème des milieux si la configuration le permet.
- Montrer que I est le pied d'une médiane d'un triangle bien choisi.
- Montrer que I est à l'intersection de deux diagonales (le segment étant l'une d'elles) d'un parallélogramme.
- Montrer que l'une des extrémités du segment est l'image de l'autre par la symétrie de centre I.

10. Montrer que deux longueurs sont égales

- Si on dispose de mesures de longueurs, faire des calculs (utilisation des théorèmes de Pythagore, Thalès, des lignes trigonométriques suivant les cas).
- Montrer que les segments sont deux côtés opposés d'un parallélogramme.
- Montrer qu'un des segments est l'image de l'autre par une isométrie (propriétés des triangles isométriques).

11. Montrer que trois droites d'un plan sont concourantes

- Montrer que deux d'entre elles sont sécantes et que la troisième passe par leur point d'intersection.
- Montrer que les trois droites sont trois médiatrices, médianes, hauteurs ou bissectrices d'un même triangle.