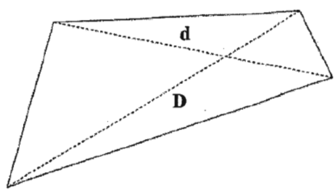
Sujet 2014 du groupement 1, énoncé

Première partie, 13 points

Dans ce problème, on s'intéresse à différentes méthodes de calcul ou d'estimation de l'aire de certains quadrilatères.

A – Chez les Mayas



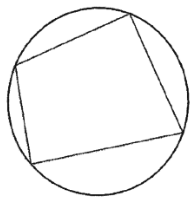
Les civilisations anciennes utilisaient divers procédés pour estimer les aires des champs. Les Mayas, par exemple, estimaient l'aire d'un quadrilatère en calculant le demi-produit des longueurs des diagonales.

$$\text{Aire} \approx \frac{\text{D} \times \text{d}}{2}$$

1. Justifier que cette estimation Maya donne la valeur exacte de l'aire d'un carré de côté a.

2. On considère un rectangle de longueur 4 cm et de largeur 3 cm. La formule Maya donne-t-elle la valeur exacte de l'aire de ce rectangle ?

B – Chez les Indiens



On dit qu'un quadrilatère est inscriptible dans un cercle si ses quatre sommets sont des points de ce cercle. C'est le cas du quadrilatère ci-contre.
Brahmagupta, mathématicien indien du VII[e] siècle, a établi une formule donnant l'aire d'un tel quadrilatère lorsqu'il est non croisé :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

où a, bc, d sont les longueurs du quadrilatère et p son demi-périmètre.

1. Étude d'une configuration particulière

a) Construire un cercle Γ et deux points A et C diamétralement opposés sur ce cercle. Placer un point B sur le cercle Γ distinct des points A et C.
Construire le point D, symétrique du point B par rapport à la droite (AC).
Laisser apparents les traits de construction.

b) Justifier que le quadrilatère ABCD est inscriptible dans le cercle Γ.

c) Exprimer l'aire du quadrilatère ABCD en fonction des longueurs AB et BC en utilisant la formule de Brahmagupta.
On admettra que le quadrilatère ABCD est non croisé.

d) Retrouver l'expression de l'aire du quadrilatère ABCD par une autre méthode.

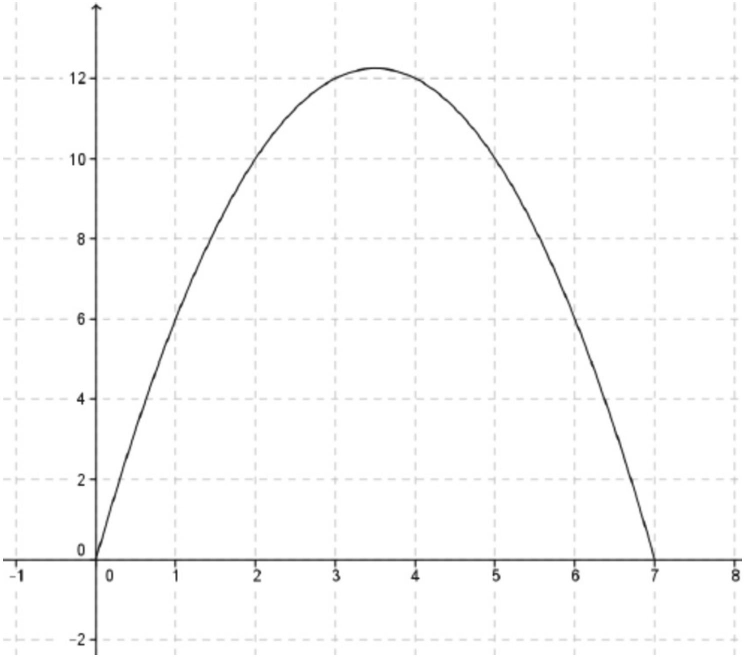
2. Étude d'une autre configuration particulière : le rectangle

a) Justifier qu'un rectangle est inscriptible dans un cercle.

b) À l'aide de la formule de Brahmagupta, retrouver l'expression usuelle de l'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l.

C – À l'ère du tableur

On s'intéresse à l'aire de tous les rectangles dont le périmètre est 14 cm.
On note x la mesure en cm d'un des côtés d'un tel rectangle. La fonction A qui à x associe l'aire $A(x)$ en cm² du rectangle est représentée ci-dessous.



1. Pourquoi se limite-t-on à des valeurs de x comprises entre 0 et 7 ?

2. Étude graphique

Répondre aux questions suivantes, par lecture de la représentation graphique de la fonction A.

a) Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre 14 cm et d'aire 10 cm² ?

b) Encadrer par deux nombres entiers consécutifs la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle sera maximale.

c) Encadrer par deux nombres entiers consécutifs la valeur de l'aire maximale du rectangle.

3. Poursuite de l'étude à l'aide d'un tableur

a) Proposer une formule qui, entrée dans la cellule B2 et recopiée vers la droite, a permis d'obtenir les valeurs de $A(x)$ sur la ligne 2.

b) À partir du tableau ci-dessous, améliorer l'encadrement de la valeur de x obtenu par lecture graphique à la question 2.b). Donner alors une estimation de la valeur de l'aire maximale.

Presse-papiers | Police | Alignement | Nombre

D6 | f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
2	$A(x)$	12	12,09	12,16	12,21	12,24	12,25	12,24	12,21	12,16	12,09	12

4. Détermination des valeurs exactes

a) Justifier que pour tout x de l'intervalle $[0; 7]$, on a $A(x) = \frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$.

b) Pour quelle valeur de x l'aire $A(x)$ est-elle maximale ? Justifier.
Quelle est la valeur maximale de $A(x)$?

c) Que peut-on dire du rectangle de périmètre 14 cm et d'aire maximale ?

Deuxième partie, 13 points

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Le cross du collège a eu lieu. 200 élèves de troisième ont franchi la ligne d'arrivée.
Voici les indicateurs des performances réalisées en minutes.

Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Moyenne	Étendue
12,5	14,8	15,7	16,3	15,4	4,2

Répondre aux questions suivantes en justifiant.

1. Quelle est la performance en minutes du dernier arrivé ?

2. Quelle est la somme des 200 performances en minutes ?

3. Ariane est arrivée treizième. Donner l'encadrement le plus précis possible de sa performance en minutes.

4. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
Affirmation : Plus de 50% des élèves ont mis un temps supérieur au temps moyen.

EXERCICE 2

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. **Affirmation 1 :** La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.

2. **Affirmation 2 :** La somme des angles d'un pentagone convexe est égale à 540°.

3. On dispose du plan d'une maison à l'échelle 1/50.

Affirmation 3 : Les aires sur le plan sont 50 fois plus petites que les aires réelles.

4. Shéhérazade commence à lire un conte un lundi soir. Elle lit 1001 nuits consécutives.

Affirmation 4 : Elle termine un dimanche soir.

EXERCICE 3

Pour s'entraîner, un cycliste effectue un parcours aller-retour entre deux villes A et B distantes de 45 km. Il part de la ville A à 9h30 et on considère qu'à l'aller, il roule à une vitesse constante de 30 km/h. Après un repos d'une heure, il repart de la ville B et cette fois-ci rejoint la ville A à la vitesse constante de 50 km/h.

1. À quelle heure arrive-t-il à la ville B ?

2. Représenter graphiquement la distance entre le cycliste et la ville A sur l'intégralité du parcours. On placera en abscisse l'heure de la journée et en ordonnée la distance entre le cycliste et la ville A exprimée en km.

3. À quelle heure est-il de retour à la ville A ? Donner le résultat en heures et minutes.

EXERCICE 4

On considère un dé à quatre faces en forme de tétraèdre régulier. Ses quatre faces sont numérotées de 1 à 4. Le résultat d'un lancer est le nombre indiqué sur la face sur laquelle repose le dé.

1. On a lancé le dé six fois et obtenu la série de résultats : 1 ; 2 ; 4 ; 1 ; 1 ; 2. Au 7^{e} lancer, la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 3 sont-elles différentes ?

2. On lance le dé deux fois de suite.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 1 lors de ces deux lancers ?

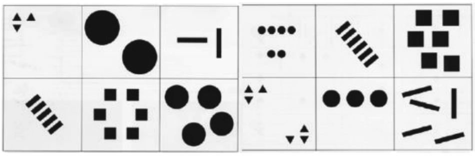
b) Quelle est la probabilité que le nombre obtenu au deuxième lancer soit strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer ?

Troisième partie, 14 points

Cette partie est composée de deux exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un enseignant propose un jeu de bataille à ses élèves de maternelle. Il utilise un jeu de cartes représentant les nombres de 1 à 6. Voici douze cartes extraites du jeu : par exemple, la première carte (en haut à gauche) représente le nombre 3 et la dernière carte (en bas à droite) représente le nombre 5.



« Vers les maths, Maternelle moyenne section » p. 130 et 131, Éditions ACCES, 2009.

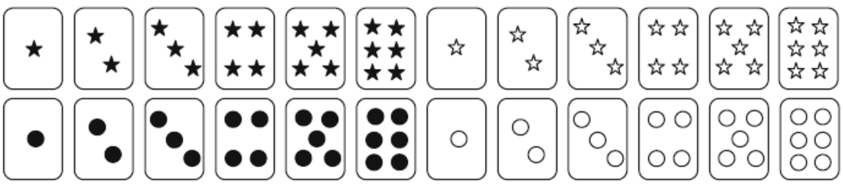
Voici la règle du jeu :

Deux élèves s'opposent. Les cartes sont battues puis distribuées, puis chacun des deux élèves pose ses cartes, à l'envers, en tas devant lui. Ils retournent chacun une carte : celui dont la carte représente le nombre le plus grand remporte les deux cartes et les met sous son tas. En cas d'égalité, chaque élève retourne une nouvelle carte sur la table. Celui dont la nouvelle carte représente le nombre le plus grand remporte toutes les cartes retournées sur la table. À la fin, celui qui n'a plus de cartes a perdu. *(On peut aussi arrêter le jeu au bout d'un certain temps et compter les cartes de chacun des deux élèves : celui qui a le plus de cartes a gagné).*

1. Citer deux compétences mathématiques travaillées par les élèves lors de ce jeu de bataille.

2. Pour chaque compétence citée en réponse à la question 1., donner deux causes possibles d'erreurs.

3. L'enseignant peut utiliser un autre jeu de cartes représenté ci-dessous :



Comparer les intérêts respectifs de chacun des jeux au regard des compétences citées en réponse à la question 1.

EXERCICE 2

A. En classe de CM1, un enseignant propose en application de la leçon sur les nombres décimaux les deux exercices suivants :

Exercice 1 Calcule les sommes suivantes : 0,3 + 0,8 1,3 + 0,12 *Cadre n°1*

Exercice 2 Range dans l'ordre croissant les nombres décimaux suivants 5,100 5,6 5,03 *Cadre n°2*

1. Voici les réponses d'un élève à l'exercice 1 :

$$0{,}3 + 0{,}8 = 0{,}11$$
$$1{,}3 + 0{,}12 = 1{,}15$$

Cadre n°3

À partir de ces réponses, indiquer ce que cet élève semble maîtriser et ce qu'il lui reste à travailler.

2. Voici les réponses d'un élève à l'exercice 2 :

$$5{,}03 < 5{,}6 < 5{,}100$$

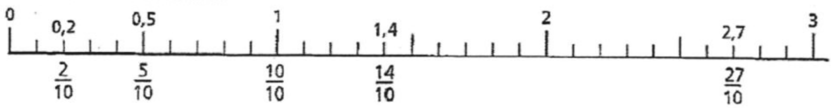
Cadre n°4

a) Quelle représentation erronée des nombres décimaux pourrait être à l'origine de l'erreur de cet élève ? Justifier.

b) Quelle désignation orale des nombres 5,03 ; 5,6 et 5,100 l'enseignant pourrait-il utiliser pour aider les élèves à se construire une bonne représentation des nombres décimaux ?

B. En classe de CM2, un autre enseignant propose l'exercice de réinvestissement suivant :

8 Tu as appris au CM1 que la **fraction décimale** $\frac{2}{10}$ est égale au **nombre décimal** 0,2.
Observe cette droite graduée ; elle te permet de trouver les égalités entre fractions décimales et nombres décimaux.



a. Complète les égalités : $\frac{5}{10} = 0,\ldots$; $\frac{8}{10} = \ldots$; $\frac{1}{10} = \ldots$

$0{,}3 = \frac{\ldots}{10}$; $0{,}7 = \frac{\ldots}{\ldots}$; $0{,}9 = \frac{\ldots}{\ldots}$

Cadre n°5

Extrait du manuel « Pour comprendre les mathématiques CM2 », Hachette 2005.

1. Quelle définition d'un nombre décimal peut-on donner à l'école élémentaire ?

2. Un élève affirme que la somme de deux nombres décimaux ne pourra jamais être un nombre entier. Comment l'enseignant peut-il utiliser le support de l'exercice du *cadre 5* pour lui apporter une réponse justifiée ?

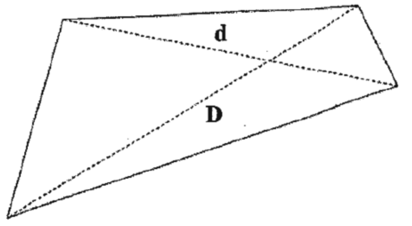
3. Un autre élève se demande si la somme de deux nombres décimaux est toujours un nombre décimal. Quelle réponse argumentée l'enseignant peut-il lui apporter ?

4. Pour prolonger l'activité, l'enseignant demande aux élèves de placer le nombre 1,07 sur la droite graduée de l'exercice ci-dessus. Citer deux intérêts qu'il pourrait y avoir à prolonger ainsi l'activité.

Corrigé du sujet 2014 du groupement 1

Première partie, 13 points

A – Chez les Mayas



1. Dans un carré de côté a, chaque diagonale mesure $a\sqrt{2}$ unités de longueur.

En effet, dans un carré ABCD de côté a, on peut calculer la longueur de la diagonale AC dans ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2 \Leftrightarrow \mathrm{AC}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow \mathrm{AC}^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \mathrm{AC} = a\sqrt{2}$$

La formule Maya donnerait donc dans ce cas :

$$\frac{\mathrm{D} \times \mathrm{d}}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times a\sqrt{2}}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2$$

On retrouve bien l'aire du carré.

2. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur. Dans le rectangle considéré, on calcule celle-ci grâce au théorème de Pythagore :

$$\mathrm{D}^2 = \mathrm{d}^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow \mathrm{D} = \mathrm{d} = 5$$

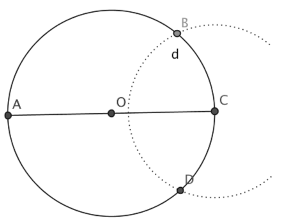
L'aire du rectangle est $4 \times 3 = 12$ cm². La formule Maya donnerait dans ce cas :

$$\frac{\mathrm{D} \times \mathrm{d}}{2} = \frac{5 \times 5}{2} = 12{,}5$$

Cette fois-ci, la formule Maya ne donne pas l'aire exacte du rectangle.

B – Chez les Indiens

1.a) et b)



Les points A, B et C sont par définition sur le cercle Γ. Montrons que le point D est lui aussi situé sur ce cercle. D est l'image de B par la symétrie d'axe (AC). (AC) étant un diamètre de Γ, Γ est invariant par symétrie d'axe (AC), et l'image de B, point du cercle Γ est également un point du cercle. D est donc bien un point de Γ, et ABCD est inscrit dans Γ.

NB : on aurait aussi pu écrire que le centre O de Γ appartenant à (AC), il est invariant par la symétrie d'axe (AC). Une symétrie conservant les distances, en notant s la symétrie d'axe (AC), on a : $OB = s(O)s(B) = OD$*, et donc D appartient à Γ.*

c) A et C étant invariants par la symétrie d'axe (AC), on a : AB = AD et BC= DC. Le demi-périmètre de ABCD est donc :

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) = \frac{1}{2}(AB + BC + BC + AB) = AB + BC$$

Avec la formule de Brahmagupta :

$$S = \sqrt{(p - \mathrm{AB})(p - \mathrm{BC})(p - \mathrm{CD})(p - \mathrm{DA})} = \sqrt{\mathrm{BC} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BC}}$$
$$= \mathrm{AB} \times \mathrm{BC}$$

d) Les points B et D étant deux points du cercle de diamètre [AC], les triangles ABC et ADC sont rectangles en B et D respectivement. L'aire de ABCD est donc la somme des aires de ces triangles. On a montré précédemment que ces triangles sont isométriques, donc ils ont la même aire. On en déduit :

$$A_{ABCD} = 2 \times A_{ABC} = 2 \times \frac{AB \times BC}{2} = AB \times BC$$

2.a) Un rectangle a ses diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu. Il est donc inscriptible dans le cercle ayant pour diamètres les diagonales.

2.b) Le demi périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur l est $p = L + l$. La formule de Brahmagupta donne :

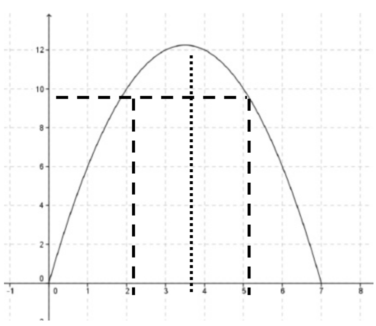
$$S = \sqrt{\big((L + l) - L\big)\big((L + l) - l\big)\big((L + l) - L\big)\big((L + l) - l\big)} =$$

$\sqrt{L \times l \times L \times l} = \sqrt{L^2 \times l^2 =} L \times l$. On retrouve bien l'expression usuelle de l'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l.

C – À l'ère du tableur

1. Le rectangle a un périmètre égal à 14 cm, le demi-périmètre est donc 7 cm. Si x est une des deux dimensions du rectangle, la seconde est donc $y = 7 - x$.
Les valeurs de x et de y sont évidemment positives donc $x \geq 0$, et $y \geq 0$.
$y \geq 0 \Leftrightarrow 7 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7$. On en déduit $0 \leq x \leq 7$.
Par lecture graphique, on répond aux questions suivantes :

2.a) Les dimensions d'un rectangle de périmètre 14 cm et d'aire 10 cm^2 sont 2 cm et $7 - 2 = 5$ cm. Il n'y a qu'un rectangle vérifiant ces conditions, puisque le second rectangle possible a pour dimensions 5 cm et $(7 - 5) = 2$ cm donc est identique au premier rectangle cité.



b) La valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle sera maximale sera comprise entre 3 cm et 4 cm.

c) L'aire maximale du rectangle est comprise entre 12 cm^2 et 13 cm^2.

3. Poursuite de l'étude à l'aide d'un tableur

a) Nous avons expliqué dans la question C1. que les dimensions du rectangle étaient x et $(7 - x)$. On entre donc en cellule B2 : « =B1*(7-B1) ».