Chapitre 1

Calculs de sommes

De nombreux exercices d'Olympiades font intervenir des calculs de sommes. Aussi est-il important, non seulement de connaître les formules permettant de calculer ces sommes (le plus souvent ces formules sont d'ailleurs rappelées dans les sujets proposés), mais aussi de savoir les retrouver par des approches différentes.

1.1 Somme des n premiers entiers

On considère, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, la somme :

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

On cherche une formule explicite (ou encore une formule close) pour la somme S_n en fonction de n.
Nous allons l'établir de plusieurs façons.

Première méthode : par duplication.

On calcule $2 \times S_n$ en présentant les calculs sur deux lignes :
on écrit d'abord les termes de la somme dans l'ordre croissant de 1 à n sur la première ligne puis les mêmes termes dans l'ordre décroissant de n à 1 sur la deuxième ligne ; ensuite on ajoute les deux lignes terme à terme en colonne.
On obtient ainsi :

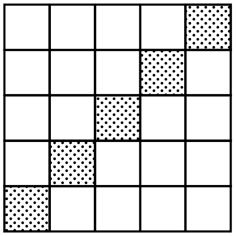
$$\begin{array}{ccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\
S_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

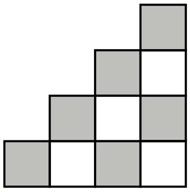
Le membre de droite de la dernière égalité comporte n termes indexés de 1 à n par les termes de la première ligne.
On en déduit $2S_n = n \times (n+1)$.

Proposition. *Pour tout entier naturel* $n \geq 1$*,* $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Deuxième méthode : par dénombrement sur une grille $n \times n$.

Donnons le principe en prenant l'exemple d'une grille 5×5.
Au total, la grille compte $5^2 = 25$ carrés de côté unité et 5 carrés forment la grande diagonale.





De chaque côté de la grande diagonale, on dénombre, en observant les carrés suivant les diagonales montantes de la grille, 1 puis 2 puis 3 puis 4 carrés *(sur le dessin ci-contre, les diagonales montantes de* 2 *et* 4 *carrés apparaissent grisées)* ; on en compte donc $1 + 2 + 3 + 4 = S_4$.

Le nombre total de carrés de la grille 5×5 vaut donc aussi $2S_4 + 5$.
Ceci conduit à l'égalité :
$5^2 = 2S_4 + 5$ soit $S_4 = \dfrac{5^2 - 5}{2}$ ou encore $S_4 = \dfrac{5 \times (5-1)}{2} = \dfrac{(4+1) \times 4}{2}$.
Le même raisonnement appliqué cette fois à une grille $(n+1) \times (n+1)$ donne alors $S_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Troisième méthode : par emploi d'un domino.

On remarque que pour tout entier naturel k non nul,
$2k = (k+1) \times k - k \times (k-1)$.
On peut donc écrire : $2 \times 1 = [(1+1) \times 1 - 1 \times (1-1)]$ soit $2 \times 1 = [2 \times 1 - 1 \times 0]$;
de même, $2 \times 2 = [3 \times 2 - 2 \times 1]$ puis $2 \times 3 = [4 \times 3 - 3 \times 2]$,
$2 \times 4 = [5 \times 4 - 4 \times 3]$, etc., jusqu'à $2 \times n = [(n+1) \times n - n \times (n-1)]$.
On en déduit la somme :
$2 \times n + \cdots + 2 \times 1 = [(n+1) \times n - n \times (n-1)] + [n \times (n-1) - (n-1) \times (n-2)] + \cdots + [4 \times 3 - 3 \times 2] + [3 \times 2 - 2 \times 1] + [2 \times 1 - 1 \times 0]$
Le membre de droite de l'égalité précédente s'appelle **une somme domino**.

Quel est le rapport avec le jeu de dominos ? Dans la somme, chaque crochet fait penser à un domino et la somme se réduit, après simplification, à la somme des termes extrêmes de la même façon, qu'aux dominos, les dés jouables sont situés aux deux bouts de la chaîne.

Par exemple :

$$[5\times 4-\underbrace{4\times 3]+[4\times 3}_{=0}-\underbrace{3\times 2]+[3\times 2}_{=0}-\underbrace{2\times 1]+[2\times 1}_{=0}-1\times 0]=[5\times 4-1\times 0]$$

Finalement, on obtient :

$2\times n+\cdots+2\times 2+2\times 1=[(n+1)\times n-1\times 0]$ (principe des dominos)

Après factorisation par 2 du membre de gauche :

$2\times(n+\cdots+2+1)=(n+1)\times n$ soit $2S_n=(n+1)\times n$ et on retrouve :

$S_n=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Au passage, on a obtenu une formule pour la somme des n premiers entiers naturels pairs :

$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=[(n+1)\times n-1\times 0]=n\,(n+1)$.

Le symbole de sommation $\sum$

Pour représenter de façon plus condensée la somme des premiers entiers, on écrit :

$1+2+\cdots+n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$ (prononcer « somme des k pour k allant de 1 à n »).

Plus généralement, $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)$ (prononcer « somme des $f(k)$ pour k allant de 1 à n »).

On écrira donc par la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\,(n+1)}{2}$.

La variable k est appelée indice de la somme ; on utilise aussi fréquemment la lettre i comme variable d'indice.

D'un point de vue algorithmique, la variable k joue le rôle de la variable k d'une boucle itérative Pour - Fin pour.

Observer l'analogie avec le programme suivant :

Traitement	**Affecter** à S la valeur 0
	Pour k **allant de** 1 **jusqu'à** n **faire**
	Affecter à S la valeur $S+k$
	Fin pour
Sortie	**Afficher** S.

Si on exécute ce programme, il retourne, pour la valeur de n choisie, la somme des entiers de 1 à n.

Signalons aussi qu'une propriété importante du symbole $\sum$ est sa linéarité :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(f(k)+g(k))=\sum_{k=1}^{n}f(k)+\sum_{k=1}^{n}g(k)$ et,

pour tout réel a, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(af(k))=a\sum_{k=1}^{n}f(k)$.

Nous avons rencontré la deuxième propriété avec la somme des n premiers entiers naturels pairs :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)=2\sum_{k=1}^{n}k=2\times\frac{n\,(n+1)}{2}=n\,(n+1)$.

La première propriété peut être vue comme un réarrangement des termes de la somme initiale.

1.2 Somme des n premiers nombres impairs

Cette somme intervient fréquemment dans les exercices d'Olympiades académiques; il s'agit de donner une formule, en fonction de n, de la somme :

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Il est intéressant de calculer cette somme de plusieurs façons.

Première méthode : par duplication.

On calcule le double de la somme :

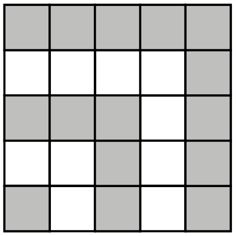
$$\begin{array}{ccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 3 & + & \cdots & + & (2n-3) & + & (2n-1)\\
S_n & = & (2n-1) & + & (2n-3) & + & \cdots & + & 3 & + & 1\\
\hline
2S_n & = & 2n & + & 2n & + & \cdots & + & 2n & + & 2n
\end{array}$$

On en déduit $2S_n=(2n)\times n$ soit après simplification par 2 : $S_n=n^2$.

Proposition. *Pour tout entier* $n\geq 1$, $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Deuxième méthode : par dénombrement sur une grille.

Donnons le principe en prenant l'exemple d'une grille 5×5.
Au total, la grille compte $5^2 = 25$ carrés de côté unité.



Sur la grille, les « chevrons » alternativement grisés et clairs contiennent un nombre impair de carrés. Par conséquent, 25 s'obtient comme une somme de nombres impairs : $5^2 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$. On remarque que $9 = 2 \times 5 - 1$.
Sur une grille $n \times n$, le raisonnement précédent conduit à l'égalité :
$n \times n = n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$.

Troisième méthode : par emploi d'un domino.

L'identité remarquable : $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ permet d'écrire un nombre impair comme différence de deux carrés consécutifs : $2k + 1 = (k+1)^2 - k^2$.
On obtient ainsi le domino $\left[(k+1)^2 - k^2\right]$ et
$S_n = \left[n^2 - (n-1)^2\right] + \left[(n-1)^2 - (n-2)^2\right] + \cdots + \left[1^2 - 0^2\right] = n^2$.

1.3 Somme des n premiers cubes

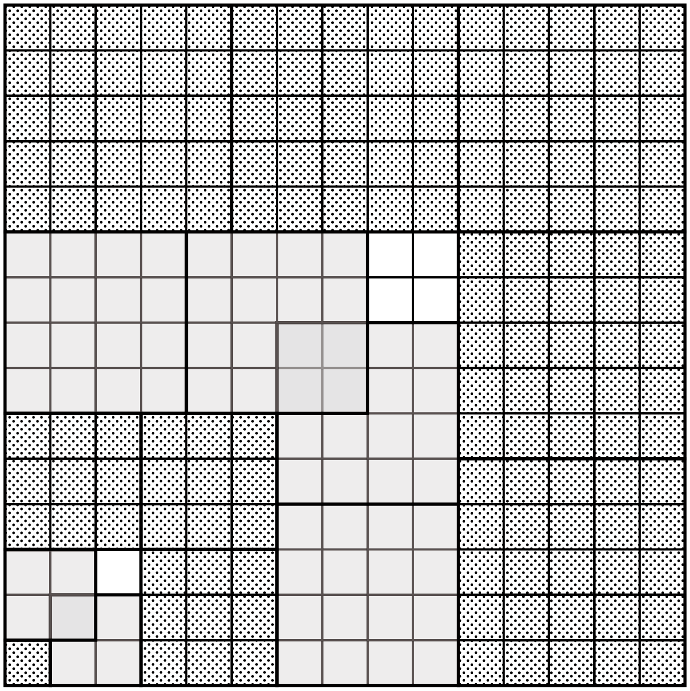
On s'intéresse dans cette section à la somme des premiers cubes :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Il est remarquable que cette somme soit égale au carré de la somme des n premiers entiers :

Proposition. *Pour tout entier* $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Démontrons-le avec le principe des dominos :
$\left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k\,(k-1)}{2}\right)^2 = \left[\frac{k\,(k+1)}{2} + \frac{k\,(k-1)}{2}\right] \times \left[\frac{k\,(k+1)}{2} - \frac{k\,(k-1)}{2}\right]$
$\left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k\,(k-1)}{2}\right)^2 = k^2 \times k = k^3$
Le principe des dominos donne alors :
$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{1\,(1-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$.
On peut retrouver ce résultat géométriquement à l'aide d'une grille carrée.



Sur la figure ci-dessus, on observe que la taille des carrés varie de 1 à 5 sur une grille 15×15 où $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Regardons pour commencer les carrés de côtés impairs, disposés en « chevrons » sur la grille, et coloriés par de petits points ; les carrés de taille 3 sont au nombre de 3, ceux de taille 5 au nombre de 5 donc le « chevron de taille 3 » représente $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ petits carrés de la grille, et celui de taille 5 représente le cube 5^3.

Observons maintenant les carrés de côtés pairs, de tailles 2 et 4, coloriés en gris clair. Ces carrés, au nombre de 2 et 4 respectivement, ne forment pas tout à fait un « chevron » parce que deux d'entre eux se recouvrent et laissent une partie de la grille apparente ; il suffit alors de remarquer que le chevauchement des carrés a la même aire que la partie de la grille apparente (cette aire vaut le quart d'un carré). De plus, les carrés de côtés 2 et 4 représentent respectivement $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ et $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ petits carrés de la grille.

Il ne reste plus qu'à exprimer le nombre total de petits carrés de la grille de deux façons différentes : $15 \times 15 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ ce qui donne bien :

$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$.

Ce raisonnement s'étend à une grille de taille $m \times m$ où $m = 1 + 2 + \cdots + n$.

1.4 Somme des n premiers carrés

Entre la somme des n premiers entiers et celle des n premiers cubes, on trouve logiquement la somme des n premiers carrés, à savoir :

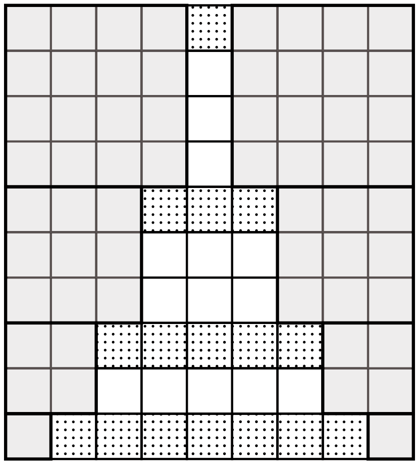
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Proposition. *Pour tout entier $n \geq 1$,*
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = \dfrac{n\,(n+{}^1\!/\!{}_2)\,(n+1)}{3}$.

On utilise une nouvelle fois le principe des dominos.
Partons de l'identité : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.
Après sommation : $(n+1)^3 - 1^3 = 3 \times \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \sum_{k=1}^{n} k + n$
Or $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ donc : $(n+1)^3 - (n+1) = 3 \times \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.
$(n+1)\left[(n+1)^2 - 1\right] - 3 \times \dfrac{n\,(n+1)}{2} = 3 \times \sum_{k=1}^{n} k^2$
$n\,(n+1)\,(n+2) - n\,(n+1) \times \dfrac{3}{2} = 3 \times \sum_{k=1}^{n} k^2$
c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n\,(n+{}^1\!/\!{}_2)\,(n+1)}{3} = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

On va maintenant retrouver ce résultat géométriquement sur une grille rectangulaire de dimensions $(1 + 2 + \cdots + n) \times (2n+1)$.
Sur la grille ci-après, on a juxtaposé verticalement deux fois quatre carrés de côtés respectivement 1, 2, 3 et 4 (coloriés en gris clair) sur une grille de dimensions 10×9 où $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. On remarque que les carrés au centre de la grille qui ne sont pas recouverts forment une sorte de « pagode ». On a colorié par de petits points 4 rangées de carrés de cette « pagode » ; il faut maintenant voir que chaque rangée est constituée d'un nombre impair de carrés de la grille, 1 puis 3 puis 5 puis 7 en partant du haut jusqu'à la base de la « pagode ». Or $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, donc l'ensemble des 4 rangées coloriées représente l'équivalent d'un carré de côté 4. Si on efface ces carrés coloriés de petits points, on peut former une nouvelle « pagode » plus petite et on peut à nouveau refaire la même opération de coloriage, et ainsi de suite, de sorte que la « pagode » initiale comporte $4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$ carrés de la grille.
Reste à compter tous les carrés de la grille de deux façons différentes :
$(1 + 2 + 3 + 4) \times 9 = 3 \times \left(4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2\right)$

soit $\dfrac{4\times(4+1)}{2}\times(2\times 4+1)=3\times\left(4^2+3^2+2^2+1^2\right)$.
Ce raisonnement se généralise à n.



1.5 Somme de puissances successives

Nous terminons ce chapitre par le calcul de la somme : $S_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$ où q est un réel différent de 1 et n un entier naturel.
$qS_n = q+q^2+\cdots+q^n+q^{n+1}$ donc $qS_n+1 = 1+q+q^2+\cdots+q^n+q^{n+1}$ et $qS_n+1=S_n+q^{n+1}$.
On en déduit : $1-q^{n+1}=S_n-qS_n$ soit $1-q^{n+1}=(1-q)\,S_n$.
Finalement, puisque $q\neq 1$, $S_n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Proposition. *Pour tout entier naturel n et tout réel q, $q\neq 1$,*
$1+q+q^2+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Remarques :
Lorsque $q=2$, on peut retenir la formule précédente sous la forme :
$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.
Lorsque $q=\dfrac{1}{2}$, on peut visualiser la somme à l'aide d'un pavage du rectangle 1×2 comme le montre la figure ci-après :
Cette fois, on retient la formule sous la forme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=2-\frac{1}{2^n}$.
Le dessin suggère aussi que la somme tend vers 2 quand on augmente le nombre de termes (la partie grisée a une aire de limite nulle).