I. Espace, temps, mouvement

1. L'existence de l'univers définit « l'espace »

Depuis l'aube des temps où la conscience est apparue, les hommes ont toujours eu l'obsession sinon de comprendre, du moins de prévoir l'évolution du monde qui les entoure. De nombreuses explications du monde sont d'ordre religieux et n'excluent pas la possibilité de phénomènes surnaturels, irrationnels. Or, en dépit de telles croyances, l'observation journalière des mécanismes physiques les plus élémentaires montre systématiquement que les mêmes causes produisent les mêmes effets. Par exemple, tout objet laissé à l'action de son poids ne peut que retomber sur le sol et personne ne soutiendra le contraire ! A ce niveau, l'expérience quotidienne ne laisse place à aucun miracle, aucun comportement irrationnel ! Aussi, sans pouvoir l'expliquer vraiment, il est naturel de conjecturer qu'il en sera toujours ainsi, même dans le cas des phénomènes complexes non encore expliqués ou de ceux qui seront découverts ultérieurement. Le développement de la physique est ainsi lié à cette seule croyance que le comportement de tous les objets inertes ou vivants qui constituent l'univers suit la logique des mathématiques. Dans ce cadre, il est donc concevable de rechercher, d'extraire de la seule observation, les règles permettant de prévoir le devenir de tout système physique. Il s'agit d'un programme ambitieux car les systèmes constituant l'univers possèdent toutes les formes, toutes les tailles allant des particules élémentaires jusqu'aux ensembles de galaxies, en passant bien évidemment par les objets usuels (planètes, trains, poulies, microbes…) constitués de solides, liquides ou gaz…

Les systèmes macroscopiques sont donc souvent complexes et on sait aujourd'hui qu'ils sont constitués d'un très grand nombre de particules élémentaires. Historiquement - et bien avant qu'on ait démontré expérimentalement l'existence des atomes (en 1906 !) - les physiciens ont admis que les objets sont constitués de « matière » : concept posé a priori pour qualifier « ce qui existe ». Celle-ci peut être considérée comme continue ou discrète, c'est-à-dire composée d'objets de taille ultime insécables (les atomes de Démocrite, V^{e}-IV^{e} siècle av. J.-C.). Que la matière soit continue ou non, tout objet matériel peut cependant être formellement décomposé par la pensée en un ensemble de « points matériels » analogues aux points de la géométrie euclidienne. Cette décomposition de tout objet macroscopique en points matériels possède un avantage sérieux : chaque point peut être repéré par un ensemble de coordonnées dont le nombre est égal au nombre de dimensions de l'espace dans lequel il évolue et dont les valeurs dépendent du choix de l'origine du repère euclidien ainsi que des directions choisies pour définir l'espace ! Se pose immédiatement un premier problème ! Comment choisir l'origine ainsi que les directions du repère spatial ? Un tel repère a-t-il une existence propre indépendante du contenu matériel de l'univers ?

- Si l'univers n'était constitué que d'un seul point matériel, ne se poseraient absolument ni le choix de l'origine, ni le nombre de dimensions. Un univers constitué d'un seul point ne possède aucune dimension !

- Par contre, un univers constitué de deux points matériels doit être décrit par un repère dont l'origine pourrait être arbitrairement choisie sur la droite rejoignant les deux points matériels. Il devient dès lors nécessaire de définir une métrique permettant de quantifier la distance qui sépare les deux points. Un tel univers ne possède qu'une seule dimension.

- De même, un univers composé de trois points matériels ne possède que deux dimensions…

- De façon surprenante, un univers composé de plus de trois points matériels ne possède pas plus de trois dimensions spatiales (sauf si les points matériels possèdent eux-mêmes des dimensions « internes » !) C'est l'espace « macroscopique » que nous percevons quotidiennement !

Puisque, au niveau macroscopique, nous vivons dans un espace à trois dimensions, la position de tout point matériel y est définie par trois coordonnées, à condition d'avoir convenu d'un « repère », c'est-à-dire le choix d'une origine puis de trois directions particulières dans l'espace. Supposons que le repère choisi soit composé de trois directions orthogonales entre elles, alors, il peut exister différents types de coordonnées dont les plus fréquentes sont illustrées sur la figure 1.

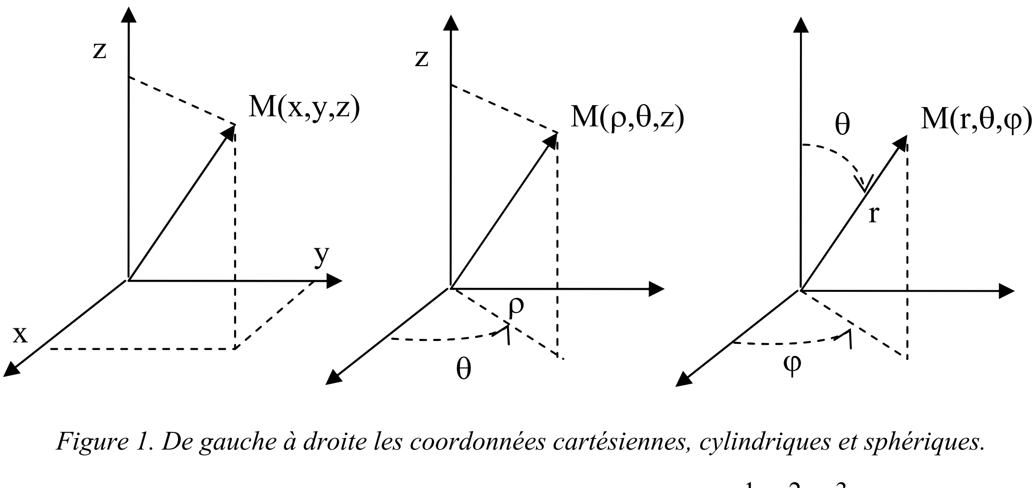

Figure 1. De gauche à droite les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Une fois que l'on a choisi un système de coordonnées (x^1, x^2, x^3), on a, du même coup, défini les vecteurs de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. En effet

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \sum_j x^j \vec{e}_j \quad \text{entraîne} \quad \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j} \tag{1}$$

Les vecteurs de base ont donc des « directions » identiques à celles des variations du vecteur position obtenues lorsque l'on fait varier une à une chacune des coordonnées de façon infinitésimale. Ainsi, les directions des vecteurs de base $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ des coordonnées cartésiennes ne dépendent pas de la position du point M, ce qui n'est pas le cas de celles des vecteurs de base $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$ des coordonnées cylindriques ni de celles des vecteurs de base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ des coordonnées sphériques qui dépendent de la position du point dans l'espace. En définitive

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r \tag{2}$$

L'utilisation des propriétés du produit scalaire[1] permet enfin de calculer la « distance » qui sépare deux points A et B, soit encore, en coordonnées cartésiennes

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \tag{3}$$

Pour quantifier cette distance, il est nécessaire de définir « conventionnellement » une unité de longueur que l'on appellerait par exemple le « mètre ». Avant tout, cette unité doit être adaptée à la taille de l'homme ! Pourquoi ne pas choisir la distance moyenne qui sépare l'épaule gauche de l'extrémité de son bras droit tendu horizontalement ? Mais cette définition est beaucoup trop fluctuante et l'Académie des sciences de Paris, en mars 1791, préféra définir une distance, du même ordre de grandeur, correspondant à la dix-millionième partie d'un quart de méridien Terrestre (un quart de grand cercle passant par les pôles). Résultant de cette convention, un mètre étalon réalisé, en 1889, en platine iridié est toujours conservé au Pavillon de Breteuil à Sèvres. Cependant dès 1983, la vitesse de la lumière dans le vide est définitivement fixée à 299 792 458 m/s et puisque, selon la relativité restreinte, c'est une grandeur constante, le mètre est redéfini comme la distance parcourue par la lumière en 1/299 792 458 seconde.

Dans l'espace habituel (de dimension 3), deux points infiniment voisins sont séparés d'une distance ds telle que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{en coordonnées cartésiennes (x,y,z)}$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2 \quad \text{en coordonnées cylindriques } (\rho, \theta, z)$$

---

[1] Dans l'espace euclidien, le produit scalaire de deux vecteurs est une quantité scalaire définie par

$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|\cos(\theta)$$

où θ est l'angle formé par les deux vecteurs et où le symbole $\left|\vec{u}\right|$. représente la norme du vecteur $\vec{u}$. Ainsi, si les vecteurs de base sont orthonormés, il vient $\vec{e}_i.\vec{e}_j = \delta_{i,j}$ où les symboles de Kronecker valent $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \quad \text{en coordonnées sphériques } (r, \theta, \varphi)$$

Toutes ces expressions peuvent s'écrire sous la forme

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{4}$$

où les g_{ij} sont les composantes d'une matrice représentant un « tenseur » appelé « tenseur métrique ». Lorsqu'une base ainsi qu'un système de coordonnées ont été choisis. Cette forme (4) est appelée « forme quadratique fondamentale ». On dit que l'espace est « euclidien » si l'expression (4) est définie positive. C'est le cas de notre espace usuel à 3 dimensions puisque l'utilisation des coordonnées cartésiennes conduit directement à la forme suivante

$$\overline{\overline{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

- *en coordonnées cylindriques*

$$\overline{\overline{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

- *en coordonnées sphériques*

$$\overline{\overline{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{7}$$

Bien évidemment, le mouvement ou l'évolution de tout système macroscopique ne peut résulter que du mouvement ou de la transformation de tous les points matériels qui le composent.

Le programme de recherche est alors tout tracé :

- établir les lois physiques qui régissent le comportement de chacun des points matériels ainsi que leurs interactions,

- déduire l'histoire de chaque système macroscopique comme la résultante de l'évolution des points matériels qui le composent.

2. L'évolution de l'univers définit « le temps »

Difficile de mesurer le temps avec une montre qui s'est arrêtée. Impossible donc de penser que le temps puisse s'écouler dans un univers qui serait statique, invariable. Le temps n'est rien d'autre qu'une mesure du mouvement, c'est-à-dire le déplacement d'objets dans l'espace. Il s'ensuit que temps et espace n'existent que si la matière (l'univers) existe et sont deux concepts qui se justifient l'un l'autre puisque l'espace est accessible à un objet en mouvement si et seulement si le temps s'écoule et, inversement, le temps n'apparaît que si les objets se déplacent, évoluent dans l'espace. Autrement dit, ils forment une même entité : « l'espace-temps ».

Si les systèmes physiques évoluent, c'est que les points matériels qui les composent changent de nature ou de position. Ce sont ces changements qui permettent de définir l'écoulement d'une variable appelée « temps » que l'on peut repérer grâce à la succession de phénomènes qui semblent a priori périodiques (rotation de la Lune, alternance des saisons, des jours et des nuits, etc.). En pratique, il est commode de diviser la durée d'un jour en 24 heures, puis chaque heure en 60 minutes ou 3600 secondes. Ces unités sont plus commodes pour décrire les faits journaliers. Par convention l'unité de temps des physiciens est la seconde (symbole « s »). Cependant, nous savons aujourd'hui que les pertes d'énergie dues aux marais éloignent la Lune de la Terre et en modifient alors sa durée de rotation, que le moindre tremblement de Terre modifie la durée du jour, etc. Il est donc nécessaire de trouver un étalon du temps beaucoup plus stable, indépendant de la durée réelle des phénomènes astronomiques. Aujourd'hui, la seconde est conventionnellement définie comme la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins F = 3 et F = 4 de l'état fondamental $^6S_{1/2}$ de l'atome de césium 133, mesurée à 0 degré Kelvin. Cet étalon fixe la durée de la seconde avec une précision relative de l'ordre de 10^{-14} et définit ce que l'on appelle le temps atomique international (TAI).

Il est difficile de se rendre compte de ce que représente l'écoulement du temps. On pourrait admettre comme Laplace, que « l'écoulement du temps n'est qu'une simple mesure du mouvement ». Intuitivement, on peut admettre que le temps s'écoule de lui-même y compris dans les systèmes démunis de toute évolution. Mais dans un tel cas, comment le mesurer ? A quoi servirait-il ? De façon plus pragmatique, dans tout univers qui évolue, nous admettrons que le temps est une grandeur continue qui s'écoule toujours du présent vers l'avenir et qu'il est absolument impossible d'en remonter son cours puisqu'il n'est là que pour définir la succession des évènements.

Dès lors que l'on a adjoint à un repère d'espace une horloge définissant en tout point de ce repère l'écoulement du temps, on dit que l'on a affaire à un « référentiel »

Ainsi deux unités fondamentales M.S. sont nécessaires pour décrire la cinématique des évènements.

- *Trajectoire*

On appelle trajectoire d'un point matériel, la courbe constituée de l'ensemble des points géométriques successivement occupés par le point matériel lorsque le temps s'écoule (figure 2).

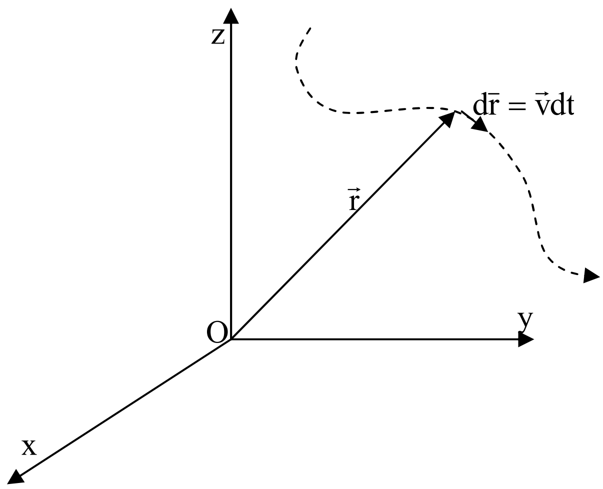

Figure 2.

- *Vitesse instantanée*

Lorsqu'un point M, situé à l'instant t à l'extrémité du vecteur $\vec{r}$, se déplace le long de sa trajectoire, il atteint un point infiniment voisin $\vec{r} + d\vec{r}$ à l'instant $t + dt$. Par convention, nous noterons systématiquement d(…) la variation infinitésimale de n'importe quelle quantité (…) dans toute la suite de cet ouvrage.

On définit la vitesse instantanée du point matériel par la quantité vectorielle

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1}$$

Puisque dt est par convention une variation infinitésimale du temps, la vitesse définie par (1) n'est rien d'autre que la dérivée du vecteur position par rapport au temps. Une telle définition mathématique ne fut possible qu'à l'issue de la maîtrise du calcul infinitésimal que l'on doit essentiellement à René Descartes (1596-1650) qui développe la géométrie analytique, Isaac Newton (1643 1727) qui développe parallèlement avec Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) le calcul différentiel ainsi que le calcul intégral.

Le module $v = |\vec{v}|$ de la vitesse s'exprime en *m/s*. Sa direction est, par construction, tangente à la trajectoire. On peut donc également écrire

$$\vec{v} = |\vec{v}|\vec{e}_t = v\vec{e}_t \tag{2}$$

où $\vec{e}_t$ est un vecteur unitaire (de longueur 1) localement tangent à la trajectoire. Pour calculer l'expression de la vitesse dans différents systèmes de coordonnées, il est utile d'exprimer la variation $d\vec{r}$ du vecteur position en fonction des variations élémentaires des coordonnées choisies :

$$d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$d\vec{r} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z \quad \text{en coordonnées cylindriques}$$

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r\sin(\theta)d\varphi\vec{e}_\theta + rd\theta\vec{e}_\varphi \quad \text{en coordonnées sphériques}$$

Divisant les expressions précédentes par dt, il vient immédiatement

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \\ &\equiv \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \\ &\equiv \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\sin(\theta)\rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\varphi\end{aligned} \tag{3}$$

Notons que lorsque la vitesse d'un point matériel est connue à tout instant, la position du point matériel l'est également. Elle est obtenue par simple « primitivation » de la vitesse, soit encore

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' \tag{4}$$

- *Accélération*

Un point matériel ne parcourt pas forcément sa trajectoire avec une vitesse instantanée constante. De ce fait, il est nécessaire de caractériser la variation instantanée de la vitesse par l'accélération. Celle–ci est définie comme la dérivée de la vitesse par rapport au temps, soit encore

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{5}$$

L'accélération correspond donc également à la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps. Contrairement à la vitesse, l'accélération n'est pas forcément un vecteur tangent à la trajectoire. En effet, en dérivant l'expression (2), il vient

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} \tag{6}$$

Or, la dérivée d'un vecteur unitaire est un vecteur qui lui est perpendiculaire. En effet

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{u}) = \frac{d}{dt}(u^2) = \frac{d}{dt}(1) = 0 = 2\vec{u}.\frac{d\vec{u}}{dt} \tag{7}$$

Cette expression montre que le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $d\vec{u}/dt$ est nul et donc que ces deux vecteurs sont orthogonaux. Ainsi, dans l'expression (6), le vecteur $d\vec{e}_t$ est parallèle au vecteur normal $\vec{e}_n$ à la trajectoire : $d\vec{e}_t = \alpha\vec{e}_n$, situé dans le plan local contenant la portion de trajectoire. Comme l'illustre la figure 3 la norme $\alpha = |\vec{e}_t| \times d\theta = 1 \times d\theta$ du vecteur $d\vec{e}_t$ peut s'exprimer en fonction de l'angle $d\theta = |d\vec{r}| / \rho = vdt / \rho$ dont a tourné le rayon vecteur de longueur ρ. Il vient en définitive

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \tag{8}$$

où ρ est le rayon de courbure (local) de la trajectoire.

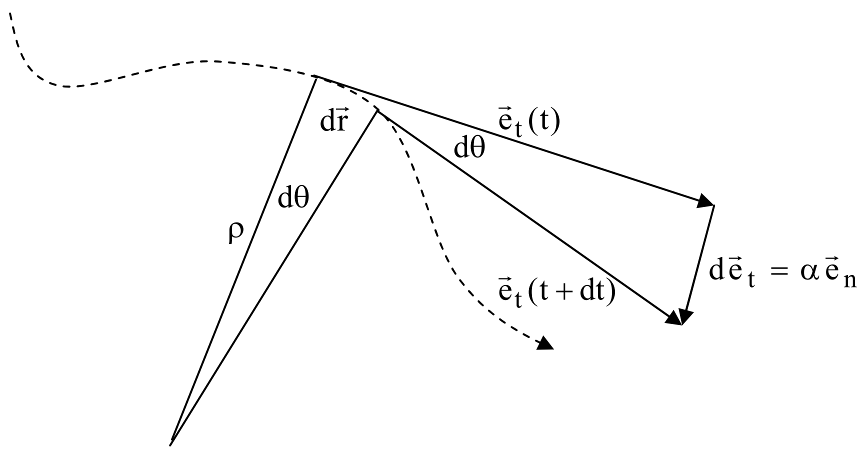

Figure 3.

L'expression (8) montre que, dans le cas général, l'accélération d'un point matériel est constituée d'une composante tangentielle correspondant à la variation du module de la vitesse et d'une accélération normale correspondant à la variation de la direction du vecteur vitesse.

Lorsque le vecteur accélération est connu à tout instant, la vitesse est déterminée et correspond à la primitivation de l'accélération

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' \tag{9}$$

puis, en utilisant (4)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)t + \int_{0}^{t} dt' \left(\int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'')dt'' \right) \tag{10}$$

La trajectoire est alors parfaitement définie s'il est possible de mesurer la position $\vec{r}_0$ et la vitesse $\vec{v}_0$ à un instant donné t_0, *sans que ces mesures perturbent elles-mêmes l'évolution du système*. S'il en est ainsi, la connaissance de ces deux quantités constitue les conditions « initiales » du problème physique.

Remarquons enfin que si un point matériel est soumis à une accélération constante, l'expression (10) conduit à

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \text{(a)} \qquad \vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad \text{(b)} \tag{11}$$

définissant un mouvement uniformément accéléré. Nous exploiterons ces résultats lors de l'étude de la force de pesanteur.

3. Relativité des mouvements

Il va de soi que l'on peut repérer le mouvement d'un même objet dans deux référentiels différents. Mais gare aux hallucinations ! Combien de fois chacun d'entre nous a eu l'impression que le quai de la gare se met à reculer alors que c'est le