

# Table des matières

Table des exercices	<i>ix</i>
Table des résumés	<i>xii</i>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Stationnarité, optimisation et principes d'extremum</b>	<b>1</b>
1.1.1. Stationnarité	1
1.1.2. Exemples de règles et de principes d'extremum	3
1.1.3. Le paradigme du bratistochrone	6
<b>1.2. Fonctionnelles</b>	<b>7</b>
1.2.1. Un premier exemple de fonctionnelle	8
1.2.2. Euler et Lagrange : naissance du calcul variationnel	9
<b>1.3. Principes variationnels</b>	<b>10</b>
1.3.1. Principes de Fermat, de Maupertuis et mécanique analytique de Lagrange	10
1.3.2. Principe de moindre Action de Hamilton	12
1.3.3. Mécanique ondulatoire et mécanique quantique	12
<b>1.4. Conclusion</b>	<b>15</b>
<b>2 Équation d'Euler-Lagrange</b>	<b>17</b>
<b>2.1. Variation d'une fonctionnelle</b>	<b>17</b>
2.1.1. Le cadre de la démonstration	17
2.1.2. Variation de la fonctionnelle $J[u]$	18
<b>2.2. Résolution dans le cadre des points extrêmes fixés</b>	<b>19</b>
2.2.1. Équation d'Euler-Lagrange	19
2.2.2. Remarques et cas particuliers	19
2.2.2.1. Erreurs à éviter	19
2.2.2.2. L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle	20
2.2.2.3. Cas où $F$ ne dépend pas de $u(x)$	21
2.2.2.4. Cas où $F$ ne dépend pas de $x$	21
2.2.3. Applications	22
<b>2.3. Cas des points extrêmes ou des limites non fixés</b>	<b>28</b>
2.3.1. Résolution dans le cas des points extrêmes non fixés	28
2.3.2. Résolution dans le cas des limites non fixées	31
2.3.2.1. Problème général	31
2.3.2.2. Extrémités assujetties sur des courbes – Conditions de transversalité	32
2.3.2.3. Lignes brisées – Conditions de Weierstrass-Erdmann	35
<b>2.4. Intégrant <math>F</math> contenant des dérivées d'ordre supérieur</b>	<b>37</b>

<b>2.5. Dérivée fonctionnelle</b>	38
2.5.1. Notion	38
2.5.2. Formalisation	38
2.5.3. Applications immédiates	40
2.5.4. Dérivées fonctionnelles d'ordre supérieur	41
2.5.5. Équations différentielles de fonctionnelles	44
<b>3 Variations à plusieurs fonctions</b>	<b>45</b>
<b>3.1. Fonctionnelles de plusieurs fonctions</b>	45
<b>3.2. Mécanique newtonienne</b>	46
3.2.1. Les lois de Newton ( <i>Philosophiæ naturalis principia mathematica</i> , 1687)	46
3.2.2. Nombre de degrés de liberté – Liaisons holonomes et non holonomes	48
3.2.3. Coordonnées et vitesses généralisées	53
<b>3.3. Mécanique lagrangienne</b>	55
3.3.1. Approche des équations de Lagrange par le principe de d'Alembert	55
3.3.1.1. Le principe des travaux virtuels de d'Alembert en dynamique	55
3.3.1.2. Première approche : les équations de Lagrange	56
3.3.1.3. Seconde approche : le principe de moindre Action de Hamilton	57
3.3.2. Équations de Lagrange – Principe de moindre Action de Hamilton	60
3.3.2.1. Conditions d'application – Lagrangien	61
3.3.2.2. Principe de Hamilton – Équation de mouvement de Lagrange	61
3.3.2.3. Emploi de la méthode lagrangienne ; équivalence avec celle de Newton	62
3.3.3. Premières applications	65
3.3.3.1. Systèmes de coordonnées	65
3.3.3.2. Mécanique du point et du solide	67
3.3.4. Formalisation de la mécanique à partir du principe de Lagrange-Hamilton	76
3.3.5. Thèmes particuliers : similitude mécanique, pseudo-potentiels, conservations	81
3.3.6. Analyse de la méthode lagrangienne	89
<b>3.4. Mécanique hamiltonienne</b>	90
3.4.1. Origine du formalisme hamiltonien	90
3.4.2. Transformation de Legendre	91
3.4.3. Moments conjugués, transformation de Legendre et équations de Hamilton	92
3.4.4. Mode d'emploi de la méthode hamiltonienne – Résolution matricielle	93
3.4.4.1. Oscillateur harmonique	94
3.4.4.2. Résolution matricielle	94
3.4.4.3. Pendule simple	96
3.4.4.4. Pendules couplés	96
3.4.4.5. Pendule sphérique	98
3.4.5. Applications	99
3.4.6. Analyse de la méthode hamiltonienne	130
<b>4 Applications du formalisme hamiltonien</b>	<b>133</b>
<b>4.1. Espace des phases et mécanique statistique</b>	133
4.1.1. Espace des phases – Portrait de phase	133
4.1.2. Exemples de portraits de phase – Propriétés immédiates	133
4.1.3. Hydrodynamique dans l'espace des phases – Théorème de Liouville	138
4.1.3.1. Équation de Liouville (1 <sup>ère</sup> forme)	140
4.1.3.2. Équation de Liouville (2 <sup>ème</sup> forme) ou principe de conservation de la densité de Gibbs	141
4.1.3.3. Théorème de Liouville (principe de conservation du volume de Gibbs)	142

<b>4.2. Symétries et conservations</b>	144
4.2.1. Invariances géométriques et conservations dynamiques – Variables cycliques	145
4.2.1.1. Exemples : conservation de moments, de l'énergie mécanique	145
4.2.1.2. Variables cycliques et intégration	149
4.2.2. Transformations canoniques	152
4.2.2.1. Condition pour une constante du mouvement – Crochets de Poisson	152
4.2.2.2. Transformations canoniques, fonctions génératrices	153
4.2.2.3. Transformations canoniques infinitésimales	159
4.2.3. Vérification d'une invariance : Crochets de Poisson	161
4.2.3.1. Invariance des crochets de Poisson dans une transformation canonique	161
4.2.3.2. Propriétés mathématiques des crochets de Poisson. Identité de Jacobi	163
4.2.3.3. Résultats généraux des crochets de Poisson	165
4.2.3.4. Applications des crochets de Poisson	168
4.2.4. Recherche des invariants : Théorème de Noether	173
4.2.4.1. Théorème de Noether pour les invariances géométriques	174
4.2.4.2. Théorème de Noether général	179
4.2.4.3. Une application fondamentale du théorème de Noether	183
4.2.4.4. Invariants dans le mouvement képlérien – Vecteur de Runge-Lenz, symétries cachées	187
<b>4.3. De Fermat à Feynman : vers la mécanique quantique</b>	202
4.3.1. La fonction Action	202
4.3.2. Principe de moindre Action de Maupertuis – Principe de la <i>vis viva</i> (Leibniz)	204
4.3.3. Équation de Hamilton-Jacobi (1836)	215
4.3.4. Mécanique ondulatoire et mécanique quantique	221
4.3.4.1. La mécanique ondulatoire de Louis de Broglie	221
4.3.4.2. Les intégrales de chemin ( <i>path integrals</i> ) de Richard Feynman	224
<b>4.4. Vers la théorie du chaos : Topologie de l'espace des phases</b>	227
4.4.1. Topologie dans l'espace des phases : Poincaré et la mécanique qualitative	228
4.4.2. Ordinateurs, attracteurs, chaos : approche moderne des systèmes dynamiques	231
<b>5 Contraintes. Problèmes isopérimétriques</b>	<b>233</b>
<b>5.1. Problèmes variationnels contraints et problèmes isopérimétriques</b>	233
<b>5.2. Solution du problème isopérimétrique</b>	234
5.2.1. Méthode de résolution	234
5.2.2. Commentaires sur la méthode de résolution	234
5.2.3. Exemples dans le cadre des fonctions usuelles	235
5.2.3.1. Un exemple simple	235
5.2.3.2. Visualisation en dimension 3	235
<b>5.3. Méthode des multiplicateurs de Lagrange pour les fonctions</b>	237
5.3.1. Fonction de deux variables	237
5.3.2. Fonction de $n$ variables sous une contrainte, sous $p$ contraintes	238
<b>5.4. Exemples de problèmes isopérimétriques</b>	239
5.4.1. Problème de Didon (boucle de corde sur un plan)	239
5.4.2. Chaînette, voilière, lintéaire et courbe élastique	242
5.4.3. Méthode variationnelle de Ritz en mécanique quantique	257
5.4.3.1. Rappels de quelques notions de mécanique quantique	257
5.4.3.2. Formulation du problème de Ritz	258
<b>5.5. Liaisons non holonomes en mécanique</b>	259

<b>6 Variations à plusieurs dimensions. Élasticité</b>	<b>263</b>
<b>6.1. Introduction : Problème à plusieurs variables</b>	263
<b>6.2. Équation d'Euler avec plusieurs variables</b>	264
6.2.1. Intégration par parties à $n$ dimensions	264
6.2.2. Équation d'Euler pour une fonctionnelle d'une fonction à 2 variables	266
6.2.3. Cas général	267
<b>6.3. Applications</b>	272
6.3.1. Méthode variationnelle de Ritz en mécanique quantique	272
6.3.2. Corde vibrante, densité de lagrangien, champs, transition vers l'élasticité	276
6.3.2.1. Énergie cinétique, énergie potentielle	276
6.3.2.2. Lagrangien, densité de lagrangien	277
6.3.2.3. Ouverture vers la relativité et la théorie des champs	278
<b>6.4. Élasticité dans le cas des petites déformations</b>	280
6.4.1. De la corde vibrante à la membrane homogène et isotrope	280
6.4.2. Membranes non isotropes et/ou non homogènes	285
6.4.3. Poutres et plaques	287
6.4.3.1. Statique des tiges et poutres sans forces localisées	290
6.4.3.2. Statique des tiges et poutres avec forces localisées	293
6.4.3.3. Dynamique des tiges et plaques	304
<b>6.5. Élasticité dans le cas des grandes déformations</b>	306
6.5.1. Historique de l'Elastica	306
6.5.2. Courbure et énergie potentielle d'élasticité	309
6.5.3. Tiges élastiques – L' <i>Elastica</i> de Bernoulli	311
<b>Conclusion</b>	<b>323</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>325</b>
<b>Index</b>	<b>327</b>