Chapitre 1
Introduction

Trois idées sont à l'origine des méthodes variationnelles *: la notion de* stationnarité *(optimisation et règles d'extremum), celle de* fonctionnelle *et enfin la généralisation de l'idée de règle d'extremum à celle de* principe variationnel.

1.1. Stationnarité, optimisation et principes d'extremum

1.1.1. Stationnarité

La notion d'**optimisation**[2] est ancrée dans notre esprit. Le but de nos actions est d'acquérir le *maximum* (de connaissances, de biens, de résultats, etc.) en le *minimum* (de temps, d'argent, d'effort, etc.). En économie, on cherche la rentabilité maximum, le minimum de pertes. Moi-même je cherche le trajet le plus court pour aller d'un endroit à un autre, sauf si le trajet est lui-même l'objet de mon déplacement, auquel cas je l'allongerai.

Notre vie quotidienne est faite de ces recherches de maximums et de minimums c'est-à-dire, en termes plus techniques, de situations **stationnaires**. Pour une fonction $f(x)$ de la variable réelle x, on appelle **point stationnaire** tout point où la dérivée de la fonction s'annule : ce peut être un maximum, un minimum, un point inflexionnel (mais de dérivée nulle), c'est-à-dire un point où la fonction ne varie pas pour une petite variation $\mathrm{d}x$ de x. Un tel point traduit un équilibre et donne une impression d'objectif atteint, d'œuvre achevée.

Il ne faut donc pas s'étonner que les Anciens aient associé cette propriété aux œuvres de la Nature et aient cherché chez elle tout ce qui pouvait être extremum : ils pensaient y trouver l'essentiel. Les problèmes pouvaient être concrets, comme celui de l'aire maximum circonscrite par une clôture de longueur fixée (**problème isopérimétrique de Didon**[3], **Archimède**, 287-212 av. J.C., **Zénodore** $\sim$ 200 ans av. J.C., **Pappus**, $\sim$ 300-360 ap. J.C.), mais aussi abstraits. Parmi ces derniers apparaît très tôt celui de la nature de la lumière (**Pythagore**, 570-480 av. J.C., **Platon**, 427-347 av. J.C., **Aristote**, 384-322 av. J.C.), et la question de sa propagation. Dès le III^e^ siècle av. J.C., la propagation rectiligne était admise et **Euclide** énonçait la loi de la réflexion. Il faudra attendre le 1^er^ siècle ap. J.C. pour que **Héron d'Alexandrie** fasse intervenir une idée d'extremum : la lumière suit le chemin “ le plus court ”. C'est déjà un **principe d'extremum**[4], parfaitement valable pour la propagation de la lumière et sa réflexion dans un milieu homogène ;

---

[2] Les mots cités dans l'index sont imprimés en **gras** dans le texte pour une recherche plus aisée.
[3] Le lecteur est encouragé à consulter le Net pour se remémorer ces légendes antiques et les avancées mathématiques de cette époque.
[4] En fait c'est même un principe variationnel dans le sens où un calcul variationnel est impliqué.

mais on sait qu'il est faux pour la réfraction, quand la lumière passe dans un milieu différent. En fait tel que je l'ai écrit il n'est pas vraiment faux car mon énoncé est intentionnellement ambigu. Quand je vais de mon domicile à mon bureau, je recherche le trajet " le plus court ", mais le plus court comment ? En distance ? Ce qui va m'obliger à passer par des chemins trop fréquentés et encombrés, à être ralenti par des feux de croisement, etc. Ne serait-ce pas plutôt en temps ?

En fait, le problème d'un déplacement en un minimum de temps a très tôt attiré l'attention, mais sans rapport direct avec la propagation lumineuse. La question était académique : c'est celle d'une bille lâchée d'un point A dans le champ de pesanteur et que l'on veut faire aller en un minimum de temps au point C, d'altitude inférieure mais pas sur la verticale de A ; pour cela on l'oblige à suivre sans frottement une trajectoire déterminée, par exemple dans une gouttière déformable ; le tout est de trouver la forme de la gouttière.

Vers 1610, **Galilée**[5], professeur à Padoue, a 46 ans ; il mentionne dans une lettre à Guidobaldo del Monte sa solution qui ne sera publiée qu'en 1638 dans les *Discours et Démonstrations Mathématiques relatives à deux nouvelles sciences* : Galilée trouve un arc de cercle (figure 1.1). Le résultat est faux ! En fait, en utilisant ses résultats sur le mouvement d'une bille sur un plan incliné, Galilée montre qu'en suivant l'arc de cercle ($ADEFGC$) la bille mettra moins de temps qu'en suivant la corde (AC) ; ce qui ne signifie pas que l'arc de cercle soit la trajectoire optimale ! Ce ne sera pas la seule erreur de Galilée en matière de calcul variationnel, puisqu'il dira aussi que dans le champ de pesanteur une chaîne pesante suspendue par ses extrémités prend une forme parabolique : Galilée était soumis à l'influence de son temps qui ne reconnaissait comme courbes remarquables que la droite, le cercle, la parabole et autres coniques. La véritable solution de son problème de moindre temps est la **cycloïde** (ou **roulette** comme disait **Pascal**[6] qui l'étudiera en 1658),

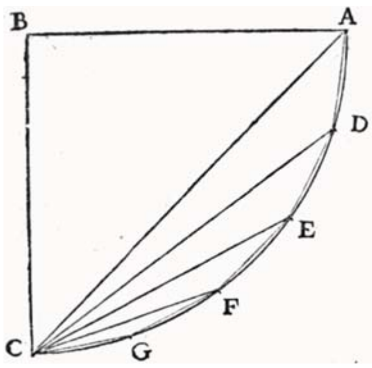

FIGURE 1.1 : Figure originale concernant le problème du Brachistochrone par Galilée *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze* (1638).

et celle de la chaîne, le cosinus hyperbolique (ou **chaînette**). Pourquoi mentionner cette anecdote ? Simplement parce qu'avec un demi-siècle d'avance, Galilée venait

[5] Galileo Galilei, Pise, 1564 – Arcetri près de Florence, 1642.
[6] Blaise Pascal, Clermont, 1623 – Paris, 1662.

d'aborder le problème mathématique associé au **principe de Fermat**[7] qui, lui, est un **principe variationnel** solide.

1.1.2. Exemples de règles et de principes d'extremum

Disons quelques mots sur les **points stationnaires** et les **principes d'extremum**. Les problèmes de statique se résolvent par la recherche du minimum d'un potentiel, ce qui constitue un exemple d'utilisation technique de l'optimisation en mécanique. On retrouve aussi un principe d'extremum avec le **2$^{\mathbf{d}}$ principe de la thermodynamique** énoncé sous la forme : *un système thermodynamique atteint un équilibre pour un maximum de son entropie*. Cet aspect est illustré dans ce premier exercice[8] :

□ Exercice 1.1 : Thermalisation

Un cylindre isolé thermiquement de l'extérieur est cloisonné par un piston (étanche mais non isolant thermiquement) en deux compartiments (1) et (2). Au temps $t = 0$ on bloque le piston pour l'empêcher de coulisser ; les compartiments (1) et (2) ont alors pour volumes respectifs V_1 et V_2. Dans (1) on introduit n_1 moles d'un gaz parfait de chaleur molaire C_V constante à la température T_1 et sous la pression P_1, et dans (2), n_2 moles du même gaz parfait à T_2 et P_2. Le piston est débloqué et on laisse l'ensemble s'équilibrer. Calculer les pressions, volumes et températures à l'équilibre, en n'utilisant que des principes reconnus.

□ ***Solution :***

Les 6 variables d'état initiales, V_1, V_2, P_1, P_2, T_1 et T_2 sont connues. Elles sont reliées entre elles par les équations d'état de chaque gaz initialement à l'équilibre : $P_1V_1 = n_1RT_1$ et $P_2V_2 = n_2RT_2$. Pour déterminer les 6 variables finales, V_1', V_2', P_1', P_2', T_1' et T_2', il faut donc 6 équations.

(i) La géométrie impose $V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$,

(ii) L'équilibre mécanique conduit à $P_1' = P_2'$,

(iii) et (iv) Les équations d'état de chaque gaz à l'équilibre final sont :

$$P_1'V_1' = n_1RT_1' \qquad \text{et} \qquad P_2'V_2' = n_2RT_2' \tag{1.1.1}$$

(v) 1$^{\text{er}}$ principe : Le système des deux gaz est isolé, son énergie interne est conservée : la somme des deux variations d'énergie interne est donc nulle :

$$n_1C_V(T_1' - T_1) + n_2C_V(T_2' - T_2) = 0 \tag{1.1.2}$$

En réécrivant (1.1.1) sous la forme $P_1' = \frac{n_1RT_1'}{V_1'}$ et $P_2' = \frac{n_2RT_2'}{V_2'}$ et en utilisant $P_1' = P_2'$, on a :

$$P' = P_1' = P_2' = \frac{n_1RT_1'}{V_1'} = \frac{n_2RT_2'}{V_2'} = \frac{n_1RT_1' + n_2RT_2'}{V_1' + V_2'} = \frac{n_1RT_1 + n_2RT_2}{V_1 + V_2}$$

où on a utilisé les propriétés des proportions ainsi que (1.1.2) et la géométrie.

Ainsi la pression dans l'état final est facilement calculable, mais les températures et volumes non : il faut une 6$^{\text{e}}$ équation, donnée par le 2$^{\text{d}}$ principe sous forme de principe d'extremum. Cinq équations étant disponibles pour 6 inconnues, le problème est en fait à une seule inconnue. Le but

---

[7] Pierre Fermat (“ de ” Fermat à partir de 1631), Beaumont de Lomagne, 1601 − Castres, 1665.

[8] Les exercices sont suivis de leur solution car ce sont souvent des complémentss de l'exposé.

est d'exprimer la variation d'entropie ΔS du système en fonction de cette inconnue résiduelle et de déterminer la valeur de cette dernière rendant ΔS maximum. On exprimera ΔS en fonction des pressions car P' est connu ; c'est pour cela qu'on écrira plutôt $\mathrm{d}S_i = \frac{1}{T}(n_i C_P \mathrm{d}T + h\mathrm{d}P)$ (rappelons que pour un gaz parfait $h = -V$ et $C_P = C_V + R$), donc

$$\mathrm{d}S_1 = n_1 C_P \frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{V}{T}\mathrm{d}P = n_1 C_P \frac{\mathrm{d}T}{T} - n_1 R \frac{\mathrm{d}P}{P} \quad \text{et} \quad \Delta S_1 = \int_{(1)}^{(1')} \mathrm{d}S_1 = n_1 \left[C_P \ln \frac{T_1'}{T_1} - R \ln \frac{P'}{P_1} \right]$$

La variation totale d'entropie s'écrit ainsi : $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_1 = n_1 C_P \ln T_1' + n_2 C_P \ln T_2' + \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$, où toutes les constantes additives on été regroupées. On exprime T_2' en fonction de T_1' en utilisant (1.1.2) : $T_2' = T_2 - \frac{n_1}{n_2}(T_1' - T_1)$, et on obtient ΔS en fonction de la seule variable T_1' :

$$\Delta S \propto n_1 \ln T_1' + n_2 \ln \left[n_2 T_2 - n_1 (T_1' - T_1) \right] + \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$$

D'où la dérivée $\frac{\mathrm{d}\Delta S}{\mathrm{d}T_1'} \propto \frac{n_1}{T_1'} - \frac{n_1 n_2}{n_2 T_2 - n_1 (T_1' - T_1)} = n_1 \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2 - (n_1 + n_2) T_1'}{T_1' \left(n_2 T_2 - n_1 (T_1' - T_1) \right)}$ qui s'annule pour $T_1' = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}$; la symétrie de l'expression montre que $T_1' = T_2'$ (résultat attendu). Par remplacement, le lecteur montrera le partage proportionnel des volumes : $V_1' = \frac{n_1}{n_1 + n_2}(V_1 + V_2)$ et $V_2' = \frac{n_2}{n_1 + n_2}(V_1 + V_2)$.

Un autre exemple est celui du **principe du maximum de vraisemblance** en statistique, conduisant à la **méthode des moindres carrés**. Il est basé sur l'idée que si l'on a obtenu les mesures $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ aux points de mesure $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – par exemple les tensions $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ aux bornes d'une résistance pour les intensités $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ – c'est parce qu'on avait le maximum de chance de les obtenir[9]. Si les mesures y_j sont des variables normales, indépendantes, centrées sur la valeur exacte $\phi(x_j)$ de Y pour $X = x_j$ et d'écart-type constant σ, la probabilité d'avoir obtenu l'échantillon $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est :

$$P(\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}) \propto \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(y_1 - \phi(x_1))^2 + \cdots + (y_n - \phi(x_n))^2 \right] \right\}$$

Selon le principe, la loi $\phi(x)$ pertinente est celle qui rend cette expression maximum, ou encore $(y_1 - \phi(x_1))^2 + \cdots + (y_n - \phi(x_n))^2 = \sum_j (y_j - \phi(x_j))^2$ minimum (“ moindres carrés ”). Compte tenu de l'infinité des possibilités de fonctions, on se restreint en remplaçant ϕ par une fonction f d'un type que l'on pense raisonnable, le **modèle**, modulable par quelques paramètres β_k bien placés, puis on ajuste ces paramètres pour minimiser $S(\beta_k) = \sum_j (y_j - f(x_j; \beta_l))^2$. Les meilleurs paramètres ainsi obtenus conduisent à la meilleure solution “ au sens des moindres carrés ” de type f pour représenter les données.

☐ Exercice 1.2 : Régression linéaire

Soit l'échantillon des n mesures $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ faites aux points de mesure $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On pense que la loi théorique liant les quantités y_j et x_j est de la forme $y = ax + b$. Déterminer les meilleures valeurs des paramètres a et b “ au sens des moindres carrés ” que l'on peut déduire de cet échantillon.

---

[9] Ce principe peut être justifié par un raisonnement bayésien (Féménias, 2003).

□ ***Solution :***
La quantité à minimiser est la fonction des deux variables a et b : $S(a,b) = \sum_j (y_j - ax_j - b)^2$. On calcule ses dérivées par rapport à b et à a et on les annule pour obtenir $\sum_j (y_j - ax_j - b) = 0$ et $\sum_j x_j (y_j - ax_j - b) = 0$. En notant $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_j x_j$ et $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_j y_j$ les coordonnées de Ω, " centre de gravité des points $\{(x_j, y_j)\}$ ", la première équation montre que $\overline{Y} = a\overline{X} + b$: la droite optimum passe par Ω. En éliminant b entre les deux équations, on obtient :

$$a = \frac{n\sum_j (x_j y_j) - \sum_i x_i \sum_j y_j}{n\sum_j (x_j)^2 - (\sum_j x_j)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_j (x_j y_j) - \overline{X}\,\overline{Y}}{\frac{1}{n}\sum_j (x_j)^2 - \overline{X}^2} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)}$$

où les notations $\mathrm{cov}(X,Y)$ et $\mathrm{var}(X)$ ont été utilisées à cause de la similitude du numérateur et du dénominateur avec une covariance et une variance statistiques. Ainsi, la droite d'équation

$$y = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)}x - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)}\overline{X} + \overline{Y}$$

est la meilleure droite au sens des moindres carrés passant par l'ensemble des points expérimentaux $\{(x_j, y_j)\}$.

Enfin voici un dernier exercice qui nous fait revenir au problème des trajectoires de moindre temps évoqué plus haut.

□ **Exercice 1.3 : Le chien de Fermat**
Pour récupérer un canard tué par un chasseur, un chien doit aller du point A (a, a') sur la terre ferme au point B (b, b') dans un marécage (figure 1.2). Il se déplace sur la terre à une vitesse V et dans le marécage à une vitesse $v < V$. En quel point M doit-il aborder le marécage pour atteindre B en un temps minimum ?

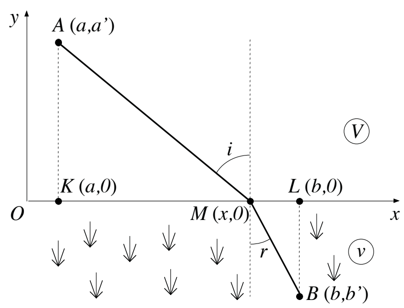

FIGURE 1.2 : Le problème du chien de chasse de Fermat.

□ ***Solution :***
De A à M, le temps de parcours est $t_1 = \frac{AM}{V} = \frac{\sqrt{(x-a)^2+a'^2}}{V}$ et de M à B, $t_2 = \frac{MB}{v} = \frac{\sqrt{(x-b)^2+b'^2}}{v}$. Le temps de parcours total est $t(x) = t_1 + t_2$; c'est cette quantité que l'on minimise en annulant sa dérivée par rapport à x :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{V}\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+a'^2}} - \frac{1}{v}\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+b'^2}} = \frac{1}{V}\frac{KM}{AM} - \frac{1}{v}\frac{ML}{MB} = 0$$

Avec $\frac{KM}{AM} = \sin i$ et $\frac{ML}{MB} = \sin r$, on obtient la loi de la réfraction : $\frac{1}{V}\sin i = \frac{1}{v}\sin r$.

Le lien avec le **principe de Fermat** est clair. Fermat a proposé son principe[10] en 1662. Avec une intuition géniale, il postule que pour aller d'un point à un autre, la lumière ne choisit pas le chemin le plus court mais celui lui prenant le moins de temps. Pour toute justification, il écrit à M. Marin Cureau de la Chambre (qui penchait pour le chemin le plus court comme Héron d'Alexandrie) : *la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus rapides.* On n'est pas loin de penser que Fermat était encore sous l'influence des idées aristotéliciennes, mais pourtant il cite Galilée qui, comme on l'a vu, avait montré que le chemin de chute le plus rapide n'était en tout cas pas la ligne droite. Cet argument peut paraître assez inconsistant, car qu'y a-t-il de commun pour nous entre une bille pesante et un rayon lumineux insensible à la gravité ? Il n'en reste pas moins vrai que grâce à la seule hypothèse de moindre temps, Fermat retrouve la loi de la réfraction de **Snell**[11] avec une hypothèse correcte sur les vitesses de la lumière ; en effet, il est amené à supposer que la lumière va moins vite dans l'eau (ou le verre) que dans l'air, contrairement à **Descartes**[12] dont la démonstration bien bâtie repose sur des hypothèses que l'on sait fausses maintenant[13]. La polémique qui suivit avec Descartes n'a pas été le plus beau chapitre de l'histoire de la Physique et a laissé un souvenir peu agréable de l'auteur de *La Dioptrique*[14].

1.1.3. Le paradigme du brachistochrone

La diffusion du principe de Fermat a entraîné un regain d'intérêt pour le problème de la trajectoire de moindre temps dans le champ de pesanteur étudié

---

10 Les remarques historiques sont en grande partie inspirées du travail de Goldstine (Goldstine, 1980).

11 Willebrord Snell, Leyde, 1580 − Leyde, 1626.

12 René Descartes, La Haye en Touraine (aujourd'hui La Haye-Descartes), 1596 − Stockholm, 1650.

13 L'hypothèse d'une vitesse de la lumière plus grande dans des milieux denses que dans l'air était logique car on savait alors, par exemple, que le son se propage plus vite dans un solide que dans l'air. Cet argument renforçait la position de Descartes. Fermat avait noté qu'il arrivait au bon résultat avec l'hypothèse opposée : " *J'ai réitéré mes opérations algébriques diverses fois, et toujours le succès a été le même, quoique ma démonstration suppose que le passage de la lumière par les corps denses soit plus malaisé que par les corps rares, ce que je crois très vrai et indispensable, et que M. Descartes suppose le contraire* ".

14 Dans *Nouvelles Perspectives en Microphysique* (Albin Michel, 1958), **Louis de Broglie** dit de lui : « *Esprit trop systématique, trop convaincu de la supériorité de ses principes, Descartes n'a pas apporté un grand nombre de contributions durables à la science moderne : sans doute on lui doit la constitution définitive de la géométrie analytique, les lois précises de la réflexion et de la réfraction de la lumière, d'ailleurs déjà énoncées avant lui par Snell, et sa belle théorie de l'arc-en-ciel ; mais, même en s'en tenant au domaine de la mécanique, on peut dire qu'il s'est presque constamment trompé dans ses affirmations. Presque tout est faux dans ses considérations sur les chocs des corps, il a énoncé le principe de la conservation de la quantité de mouvement sous une forme erronée qui a contribué à égarer les Mécaniciens pour de longues années, ses conceptions assez fantaisistes sur les tourbillons ont certainement eu une influence néfaste sur l'évolution de la Physique à cette époque... Descartes, malgré ses erreurs nombreuses et certains aspects peu sympathiques de son caractère, reste une haute figure : bien qu'il l'ait souvent entraînée dans des voies aberrantes, il a donné à la science moderne, encore dans son enfance, une vigoureuse et ineffaçable impulsion.* »

auparavant par Galilée. Comme de coutume dans ce genre de situation, on a donné un nom à ce problème-type. **Jean Bernoulli**[15] l'a nommé " problème du chemin brachistochrone ", ou " du **brachistochrone** "[16], du superlatif grec $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$, brachistos : " le plus court ", $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$, chronos : " temps "[17], et dès juin 1696, alors professeur à Gröningen en Hollande, il invite la communauté internationale des " géomètres " à chercher sa solution. Il reçoit une réponse immédiate de **Leibniz**[18] depuis Hanovre, datée du 16 juin. Jean Bernoulli et son frère aîné **Jacques Bernoulli**[19] publient leurs solutions en mai 1697, accompagnées d'une note de **Leibniz** qui se dispense de publier la sienne qu'il considère proche de celles des Bernoulli. On apprendra par la suite que **Newton**[20] avait publié anonymement une solution en janvier 1696...

Mais finalement qu'y a-t-il de nouveau ? Le point commun à tous les exemples d'optimisation abordés jusqu'ici est qu'on ne détermine pas la *fonction* optimale, mais les valeurs optimales de paramètres permettant de trouver la meilleure fonction *dans une classe prédéfinie*. Par exemple, Galilée *choisit* le cercle et définit ensuite quel cercle passant par A et C conviendra le mieux (figure 1.1). Il en est de même pour la méthode des moindres carrés où le modèle est défini et où l'optimisation se réduit au calcul des dérivées d'une simple fonction $S(\beta_k)$. Dans l'exemple du chien, les trajectoires de moindre temps en milieu homogène étant des droites (figure 1.2), la solution se réduit à la détermination du point M par une simple dérivée. Le problème du brachistochrone, lui, est plus délicat : il s'agit de trouver la trajectoire (une fonction $y(x)$) qui rendra minimum un temps t (un réel), en d'autres termes déterminer le minimum de $t[y]$: quantité numérique dépendant d'une fonction.

1.2. Fonctionnelles

Le problème du chemin suivi par la lumière, ou celui du brachistochrone, est identique au mien quand je vais à mon bureau : il me faut déterminer la fonction $y(x)$ (trajectoire) qui rendra minimum le temps de parcours t. La quantité $t[y]$ s'appelle une **fonctionnelle**, sa " variable " y est en fait une fonction ; pour distinguer une " fonctionnelle " d'une " fonction " habituelle $y(x)$, on l'écrit avec des crochets : $t[y]$. Une bonne façon de réaliser ce qu'est une fonctionnelle est de revenir au paradigme du **brachistochrone**.

---

[15] Jean Bernoulli, Bâle, 1667 – Bâle, 1748.

[16] On dit aussi " la brachistochrone " pour " courbe brachistochrone " et on écrit parfois *brachystochrone*, peu conforme au superlatif grec.

[17] Leibniz voulait l'appeler " tachystoptotam ", du grec $\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\sigma\tau\alpha\tau o\varsigma$, tachystatos : " le plus rapide ", et $\pi\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\iota\nu$, piptein : " tomber " ; le choix de " brachistochrone " n'est donc pas si désastreux.

[18] Gottfried Wilhelm Leibniz, Leipzig, 1646 – Hanovre, 1716.

[19] Jacques Bernoulli, Bâle, 1654 – Bâle, 1705.

[20] Isaac Newton, Woolsthorpe, 1643 – Londres, 1727.

1.2.1. Un premier exemple de fonctionnelle

Supposons qu'une bille de masse m soit lâchée sans vitesse initiale du point $O(0,0)$ pour atteindre le plus rapidement possible le point $A(a,b)$ par un chemin à déterminer (figure 1.3). Calculons le temps infinitésimal pour que la bille aille de

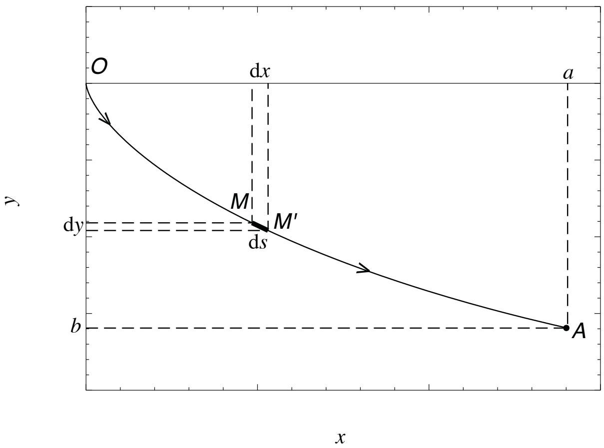

FIGURE 1.3 : Le problème du (de la) brachistochrone.

$M(x,y)$ au point infiniment voisin $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$: si la vitesse en M est $v(M)$, la distance parcourue étant $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$, ce temps est $\mathrm{d}t=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}/v(M)$. Les frottements étant négligés, la vitesse en M se déduit de la conservation de l'énergie mécanique dans cette chute d'une hauteur $|y| = -y$: $-mgy = \frac{1}{2}mv^2$ et $v(M) = \sqrt{-2gy}$. On posera $u(x) = -y(x)$, donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}u^2}{u}}$. Avec $\mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x$, il vient $\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,\mathrm{d}x$; le temps total de chute de O à A est donc :

$$t[u] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,\mathrm{d}x \tag{1.2.1}$$

$y(x) = -u(x)$ est la fonction décrivant la trajectoire suivie de O à A dans le plan Oxy. Le problème est de déterminer la fonction $u(x)$ qui rend minimum la quantité numérique $t[u]$.

La notation $t[u]$ est importante. Elle insiste sur le fait qu'une fonctionnelle est une quantité dépendant d'une fonction. Mais on remarque aussi que x n'y apparaît pas : en effet, une fois l'intégrale (1.2.1) effectuée, la variable muette x a disparu. La quantité t dépend donc de la fonction u et uniquement d'elle. Dans le résultat final apparaîtront les bornes d'intégration qui pourront avoir une importance selon le type de traitement (voir chapitre 2). La détermination de la trajectoire optimale est donc un problème qui sort du cadre des optimisations précédentes : il faut pouvoir calculer la dérivée de la fonctionnelle t par rapport à la fonction u, comme on le verra au chapitre 2.

Le résultat trouvé au XVII[e] siècle est le suivant : la trajectoire optimale de la bille pour atteindre A est un arc de **cycloïde** de tangente verticale en O. Une