

Table des matières

Présentation de la collection	3
Comment utiliser ce livre ?	5
Quelques conseils pour bien apprendre	7
SAVOIRS	9
Thème 1 - Comparaisons locales de fonctions et développements limités	10
Thème 2 - Compléments sur les suites et les séries numériques	19
Thème 3 - Intégration	25
Thème 4 - Algèbre linéaire	30
Thème 5 - Réduction	42
Thème 6 - Couples de variables aléatoires	46
Thème 7 - Fonctions de deux variables	51
Thème 8 - Variables aléatoires à densité	56
Thème 9 - Compléments sur les variables aléatoires	64
Thème 10 - Convergences	67
Thème 11 - Estimation	70
SAVOIR-FAIRE	73
Thème 1 - Comparaisons locales de fonctions et développements limités	74
Comment déterminer un développement limité au voisinage de 0 ?	74
Utiliser directement les formules connues	74
Utiliser les opérations usuelles des fonctions négligeables	75
Utiliser un changement de variable	76
Comment établir une négligeabilité au voisinage de 0 ou ∞ ?	77
Utiliser une négligeabilité usuelle	77
Utiliser les propriétés et opérations sur les équivalents	78
Utiliser la caractérisation par un calcul de limite	79
Comment déterminer un équivalent au voisinage de 0 ou ∞ ?	80
Utiliser les équivalents classiques et les opérations usuelles sur les équivalents : produit, quotient, puissance, changement de variable	81
Utiliser la propriété $f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$	83
Utiliser directement des développements limités classiques au voisinage de 0	83
Utiliser une factorisation adaptée pour se ramener à un développement limité classique	84
Utiliser un encadrement	84
Comment déterminer les propriétés locales d'une fonction au voisinage de 0 ?	86
Utiliser une comparaison ou un développement limité pour prolonger par conti- nuité une fonction en 0	86
Utiliser une comparaison ou un développement limité pour montrer qu'une fonc-	

tion est continue, dérivable ou de classe \mathcal{C}^1 en 0	86
Utiliser un développement limité pour déterminer l'équation d'une tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative d'une fonction	88
Utiliser un équivalent pour établir une convexité ou concavité locale	89
Comment déterminer une propriété locale d'une fonction au voisinage d'un point non nul fini ou infini?	89
Effectuer le changement de variable $x = x_0 + h$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} h = 0$ pour utiliser	
les savoir-faire précédents au voisinage de 0	90
Utiliser une comparaison ou un développement limité pour une analyse asymptotique d'une fonction au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$	91
Utiliser une formule de Taylor-Young	93
À vous de jouer!	93

Thème 2 - Compléments sur les suites et les séries numériques 98

Comment comparer deux suites au voisinage de $+\infty$?	98
Montrer qu'une suite est négligeable devant une autre	98
Déterminer un équivalent à l'aide d'opérations et des équivalents classiques	98
Déterminer un équivalent d'une composée par la fonction logarithme	99
Déterminer un équivalent d'une composée par la fonction exponentielle	100
Déterminer un équivalent par encadrement	101
Comment déterminer la monotonie d'une suite?	102
Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$	102
Comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 pour des suites à termes non nuls de même signe	103
Procéder par récurrence	103
Utiliser une bijection réciproque	105
Utiliser la monotonie de la fonction définissant une suite implicite	105
Comment déterminer la nature (convergence ou divergence) d'une suite?	106
Utiliser le théorème de comparaison	106
Appliquer le théorème de la limite monotone	107
Utiliser des suites extraites	109
Utiliser la nature d'une série	109
Utiliser des suites adjacentes	110
Comment montrer que la suite converge et déterminer sa limite?	111
Utiliser des opérations sur les limites	111
Utiliser le théorème d'encadrement	112
Utiliser l'inégalité des accroissements finis	112
Comment déterminer la limite d'une suite réputée convergente?	114
Passer à la limite dans une relation de récurrence	114
Utiliser une équation définissant la suite	114
Comment déterminer la nature d'une série?	115
Repérer une divergence grossière	116
Exprimer le terme général comme une combinaison linéaire de termes généraux de séries de nature connues	116
Utiliser le critère de comparaison pour les séries à termes positifs	117
Utiliser le critère d'équivalence des séries à termes positifs	118
Utiliser le critère de négligeabilité des séries à termes positifs	119
Utiliser le théorème sur les séries absolument convergentes	120
Revenir à la définition	121
Comment prouver la convergence d'une série et calculer sa somme?	121
Exhiber une bonne combinaison linéaire	121
Procéder par télescopage	123
À vous de jouer!	124

Thème 3 - Intégration	129
Comment déterminer la nature d'une intégrale ne comportant qu'un seul problème d'intégrabilité?	129
Utiliser le théorème de comparaison	129
Utiliser le théorème d'équivalence	130
Utiliser le théorème de négligeabilité	131
Utiliser la convergence absolue	132
Tenter de calculer l'intégrale	132
Comment étudier la nature d'une intégrale?	133
Diviser l'intervalle d'intégration en plusieurs intervalles ne contenant chacun qu'au plus un problème d'intégrabilité	134
Utiliser la parité ou l'imparité de l'intégrande	135
Comment calculer une intégrale?	136
Utiliser une primitive de l'intégrande	136
Se ramener à une loi de probabilité usuelle	137
Utiliser une intégration par parties	137
Utiliser un changement de variable	139
Comment encadrer une intégrale?	140
Encadrer l'intégrande sur l'intervalle d'intégration	140
À vous de jouer!	141
Thème 4 - Algèbre linéaire	145
Comment montrer qu'une application est linéaire?	145
Utiliser la définition d'une application linéaire	145
Reconnaître l'application linéaire canoniquement associée à une matrice	146
Comment montrer qu'une application est un endomorphisme?	146
Prouver la linéarité de l'application et la stabilité de l'espace de départ	146
Comment montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel?	148
Montrer que l'ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu	148
Montrer que l'ensemble est un sous-espace vectoriel engendré	149
Montrer que l'ensemble est le noyau d'une application linéaire	149
Utiliser l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène	150
Montrer que l'ensemble est l'image d'une application linéaire	150
Comment montrer qu'une famille est libre?	150
Utiliser la non colinéarité pour une famille de deux vecteurs	151
Utiliser la définition de la liberté d'une famille	151
Utiliser des vecteurs propres d'un même endomorphisme associés à des valeurs propres distinctes	151
Utiliser une concaténation de familles libres prises dans des sous-espaces propres distincts	152
Comment déterminer une famille génératrice?	152
Utiliser la définition d'une famille génératrice	153
Comment montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel?	153
Montrer que la famille est libre et génératrice	154
Montrer que la famille est libre et maximale	155
Montrer que la famille est génératrice et minimale	156
Comment déterminer la matrice de passage de la base e vers la base e' ?	156
Utiliser la définition de la matrice de passage	157
Inverser la matrice de passage de la base e' vers la base e	158
Comment déterminer la matrice d'un endomorphisme dans une base choisie?	158
Calculer l'image des vecteurs de la base de l'espace de départ	158
Utiliser des opérations sur les matrices	160
Comment déterminer le noyau d'une application linéaire l ?	161
Résoudre l'équation $l(x) = 0$	161
Comment déterminer l'image d'une application linéaire l ?	162
Déterminer l'image d'une base	163
Résoudre l'équation $l(x) = y$	163
Comment déterminer la dimension d'un espace vectoriel?	164
Déterminer le cardinal d'une base	164

Utiliser le théorème du rang	164
Comment montrer que deux espaces-vectoriels sont égaux ?	165
Procéder par double inclusion	165
Montrer une inclusion et l'égalité des dimensions	166
Comment vérifier si une application linéaire est injective ?	167
Vérifier si le noyau est réduit au vecteur nul	167
Vérifier si 0 n'est pas valeur propre	168
Comment vérifier si une application linéaire est surjective ?	168
Vérifier si l'image est égale à l'espace d'arrivée	168
Comment montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme ?	169
Déterminer l'application réciproque	169
Prouver l'injectivité et la surjectivité	170
Prouver que sa matrice est inversible	171
Montrer que les espaces d'arrivée et de départ sont de même dimension finie et montrer l'injectivité	171
Montrer que les espaces d'arrivée et de départ sont de même dimension finie et montrer la surjectivité	171
Comment déterminer le rang d'une famille de vecteurs ?	172
Déterminer la dimension du sous-espace engendré par cette famille	172
Déterminer le rang de la matrice formée par leurs vecteurs coordonnées dans une certaine base	172
À vous de jouer !	173
Thème 5 - Réduction	179
Comment rechercher les éléments propres d'une matrice carrée ou d'un endomor- phisme ?	179
Utiliser un polynôme annulateur	179
Utiliser la triangularité d'une matrice	180
Utiliser le déterminant pour une matrice d'ordre 2	182
Vérifier qu'un vecteur est vecteur propre	182
Vérifier qu'un réel est valeur propre et déterminer le sous-espace propre associé	182
Rechercher des éléments propres par résolution de système à paramètre	184
Utiliser le lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa ma- trice	186
Utiliser un critère d'inversibilité pour savoir si 0 est une valeur propre	187
Comment déterminer si un endomorphisme d'un espace de dimension n ou une ma- trice carrée d'ordre n est ou n'est pas diagonalisable ?	187
Trouver n valeurs propres distinctes	187
Utiliser la somme des dimensions des sous-espaces propres	188
Observer que la matrice est symétrique	189
Comment diagonaliser une matrice carrée ou un endomorphisme ?	190
Construire une base de vecteurs propres d'un endomorphisme	190
Diagonaliser une matrice carrée par construction d'une base de vecteurs propres	191
Vérifier que $A = PDP^{-1}$	192
À vous de jouer !	193
Thème 6 - Couples de variables aléatoires	198
Comment prouver que l'on a affaire à la loi d'un couple ?	198
Vérifier la positivité et calculer une somme double	198
Comment déterminer la loi (conjointe) d'un couple de variables aléatoires réelles	198
discrètes ?	198
Utiliser des opérations sur des événements élémentaires dont on calcule facile- ment la probabilité	198
Utiliser une loi marginale et des lois conditionnelles	202
Utiliser l'indépendance des variables aléatoires	203

Comment déterminer les lois marginales d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes ?	203
Utiliser la loi du couple	203
Utiliser une loi marginale et des lois conditionnelles	205
Comment déterminer une loi conditionnelle ?	206
Utiliser la loi du couple et une loi marginale	206
Comment déterminer la loi d'une somme de deux variables aléatoires réelles discrètes ?	207
Utiliser un théorème de stabilité	207
Utiliser la loi du couple	208
Comment déterminer la loi d'une fonction d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes ?	210
Utiliser l'expression de notre variable comme un maximum ou un minimum de variables aléatoires discrètes	211
Utiliser directement la loi du couple	212
Comment déterminer l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète ?	213
Utiliser une espérance de loi usuelle	213
Utiliser la définition de l'espérance	213
Utiliser le théorème de transfert	214
Utiliser la linéarité de l'espérance	215
Utiliser un produit de variables indépendantes d'espérances connues	215
Utiliser le théorème de transfert pour les couples de variables réelles discrètes	216
Comment calculer la variance d'une variable aléatoire réelle discrète ?	217
Utiliser la variance d'une loi usuelle	218
Utiliser la formule de Koenig-Huygens	218
Utiliser une somme de deux variables réelles discrètes indépendantes admettant chacune une variance	219
Utiliser une somme de deux variables réelles discrètes admettant chacune une variance	219
Comment calculer la covariance d'un couple de deux variables aléatoires réelles discrètes ?	220
Utiliser la formule de Huygens	220
Utiliser la variance de la somme des deux variables aléatoires	221
Utiliser la bilinéarité ou la symétrie de la covariance	221
Comment déterminer si deux variables aléatoires réelles discrètes sont indépendantes ?	222
Utiliser la définition de l'indépendance	222
Utiliser la covariance du couple	223
À vous de jouer !	224

Thème 7 - Fonctions de deux variables	229
Comment déterminer un domaine de définition ?	229
Se ramener à un domaine bien connu (quadrant ou boule)	229
Utiliser le graphe d'une fonction bien choisie	230
Comment représenter une ligne de niveau ?	230
Reconnaître l'équation d'un cercle	230
Utiliser le graphe d'une ou plusieurs fonctions numériques	230
Comment justifier qu'une application est de classe C^1 ou C^2 ?	231
Utiliser une fonction polynomiale	231
Utiliser des opérations sur les fonctions de classe C^1 ou C^2	231
Comment déterminer un gradient ou une matrice hessienne ?	231
Déterminer un gradient	232
Déterminer une matrice hessienne	232
Comment déterminer les points critiques ?	233
Rechercher un point critique	233
Comment déterminer la nature d'un point critique ?	234
Utiliser le théorème sur la nature des points critiques	234
Comment déterminer les extremums d'une fonction ?	235
Déterminer les extremums locaux	236

Utiliser le théorème de condition suffisante d'extremum	237
Utiliser la définition d'un maximum ou d'un minimum	237
À vous de jouer!	238

Thème 8 - Variables aléatoires à densité 243

Comment montrer qu'une fonction est une densité de probabilité?	243
Utiliser le théorème de caractérisation des densités de probabilité	243
Comment montrer qu'une fonction est une fonction de répartition de variable à densité?	243
Utiliser la définition d'une variable à densité	244
Utiliser le théorème de caractérisation des fonctions de répartition des variables à densité	244
Comment déterminer la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X ?	245
Intégrer une densité de la variable X	246
Utiliser l'expression de X en fonction d'une autre variable dont on connaît bien la fonction de répartition	247
Utiliser l'expression de la variable X comme le maximum ou le minimum de plusieurs variables indépendantes	248
Comment montrer qu'une variable est à densité?	249
Remarquer que sa fonction de répartition est celle d'une variable de loi usuelle	249
Montrer que sa fonction de répartition vérifie les conditions de régularité	249
Comment déterminer une densité d'une variable à densité?	251
Dériver là où cela est possible la fonction de répartition	251
Comment déterminer une espérance?	252
Utiliser la définition de l'espérance	252
Utiliser le théorème de transfert	253
Utiliser la linéarité de l'espérance	255
Utiliser l'espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes	255
Comment déterminer une variance?	256
Utiliser la variance d'une somme de variables indépendantes	256
Utiliser la formule de Koenig-Huygens	256
À vous de jouer!	258

Thème 9 - Compléments sur les variables aléatoires 265

Comment calculer l'espérance d'une somme de variables aléatoires?	265
Utiliser la linéarité de l'espérance	265
Comment déterminer l'espérance et la variance d'un produit de variables aléatoires indépendantes?	266
Utiliser le produit des espérances	266
Comment calculer la variance d'une somme de variables aléatoires?	268
Utiliser la somme des variances si les variables sont indépendantes	268
Introduire les covariances	268
Comment déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires identiques et indépendantes?	269
Utiliser un théorème de stabilité	269
Utiliser une récurrence sur le nombre de variables	271
Comment établir la loi du minimum I_n de n variables indépendantes?	272
Déterminer $p(I_n > x)$	272
Comment établir la loi du maximum S_n de n variables indépendantes?	274
Déterminer $p(S_n \leq x)$	274
À vous de jouer!	275

Thème 10 - Convergences	282
Comment majorer une probabilité?	282
Utiliser la positivité de la probabilité	282
Utiliser l'inégalité de Markov	283
Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev	284
Comment prouver un résultat de « convergence en probabilité »?	284
Utiliser la loi faible des grands nombres	284
Utiliser un calcul direct de probabilité	285
Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis utiliser le théorème d'encadrement	285
Comment étudier une convergence en loi?	286
Utiliser le théorème d'approximation des lois binomiales par des lois de Poisson	286
Utiliser le théorème limite central	287
Utiliser la limite des $p(X_n = k)$ lorsque les variables X_n sont à valeurs dans \mathbf{Z}	288
Calculer la limite de la suite des fonctions de répartition	289
À vous de jouer!	291
Thème 11 - Estimation	298
Comment étudier le biais d'un estimateur?	298
Calculer le biais	298
Montrer qu'une suite d'estimateurs est asymptotiquement sans biais	298
Comment calculer le risque quadratique d'un estimateur?	301
Calculer la somme de la variance de l'estimateur et du carré du biais de l'estimateur	301
Comment prouver qu'un estimateur est convergent?	302
Utiliser la définition de la convergence d'un estimateur	302
Montrer que le risque quadratique tend vers 0	303
Comment construire un intervalle de confiance?	304
Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev	305
Utiliser le théorème limite central	306
À vous de jouer!	308
CORRIGÉS DES EXERCICES	315