SAVOIRS

Thème 1 - Comparaisons locales de fonctions et développements limités

On note $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Soit f une fonction définie sur un domaine D. Soit x_0 un réel et soit α un réel strictement positif. On note dans toute la suite $V_{x_0} = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap D$ et l'on dit que V_{x_0} est un voisinage de x_0.
Soit a un réel positif.
On note $V_{+\infty} = [a, +\infty[\cap D$ et l'on dit que $V_{+\infty}$ est un voisinage de $+\infty$.
On définit de même un voisinage de $-\infty$ par $V_{-\infty} =]-\infty, a] \cap D$.

[S1.1] Fonctions négligeables : définition, notation

Soient f et g deux fonctions définies sur un domaine D.
Soit x_0 un point du domaine D ou une borne de D.
La fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}$, s'il existe V_{x_0} un voisinage de x_0 et une fonction réelle ε, définie sur V_{x_0} tels que :

$$\forall x \in V_{x_0},\ f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de $x_0 = +\infty$, s'il existe un voisinage $V_{+\infty}$ de $+\infty$ et une fonction réelle ε, définie sur $V_{+\infty}$ tels que :

$$\forall x \in V_{+\infty},\ f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

On a une définition similaire pour signifier que f est négligeable devant g au voisinage de $x_0 = -\infty$.

On note alors :

$$f = \underset{x_0}{o}(g) \text{ ou } f(x) = \underset{x_0}{o}(g(x)).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note $f = o(g)$ ou $f(x) = o(g(x))$ et on lit
« f égale petit o de g » ou « f est un petit o de g ».

[S1.2] Fonctions négligeables : caractérisation

Si, pour tout x de V_{x_0}, $g(x) \neq 0$ alors :

$$f = \underset{x_0}{o}(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En particulier :

$$f = \underset{x_0}{o}(1) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

[S1.3] Fonctions négligeables : exemples fondamentaux

Soient α et β deux réels fixés tels que $0 < \alpha < \beta$.
Au voisinage de 0, on a :

$$|x|^\beta = \underset{0}{o}(|x|^\alpha).$$

On retient « qu'au voisinage de 0 la plus petite puissance l'emporte ».

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(x^\beta).$$

On retient « qu'au voisinage de $+\infty$ la plus grande puissance l'emporte ». (Il en est de même en $-\infty$.)

Soient α et β deux réels fixés strictement positifs, on a alors, en relation avec le théorème de croissances comparées vu en première année :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x^\alpha} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$, ce qui entraîne :

$$ln(x) = \underset{+\infty}{o}(x^\alpha) \text{ et } x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(e^x),$$

et plus généralement :

$$(ln)^\beta(x) = \underset{+\infty}{o}(x^\alpha),\ x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(e^{\beta x}) \text{ et } e^{-\alpha x} = \underset{+\infty}{o}(x^{-\beta}).$$

On retient « qu'au voisinage de $+\infty$, toute puissance strictement positive de $ln(x)$ est négligeable devant toute puissance strictement positive de x, qui est elle-même négligeable devant toute puissance strictement positive de e^x ».

Il en découle aussi :

$$e^x = \underset{-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),$$

$$ln(x) = \underset{0}{o}\left(\frac{1}{x}\right),$$

et plus généralement :

$$ln(|x|) = \underset{0}{o}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right).$$

[S1.4] Fonctions négligeables et opérations

Soit $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. On considère les fonctions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 et h définies sur un même ensemble D et l'on étudie la négligeabilité au voisinage de x_0.

(−) Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et $g = \underset{x_0}{o}(h)$ alors $f = \underset{x_0}{o}(h)$.

$(-)$ Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et $k \in \mathbf{R}^*$, alors $kf = \underset{x_0}{o}(kg)$, $kf = \underset{x_0}{o}(g)$, $f = \underset{x_0}{o}(kg)$.

$(-)$ Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$, alors $|f| = \underset{x_0}{o}(|g|)$.

$(-)$ Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et si f et g ne s'annulent pas sur V_{x_0}, alors $\dfrac{1}{g} = \underset{x_0}{o}\left(\dfrac{1}{f}\right)$.

$(-)$ Si $f_1 = \underset{x_0}{o}(g_1)$ et si $f_2 = \underset{x_0}{o}(g_2)$, alors $f_1 f_2 = \underset{x_0}{o}(g_1 g_2)$.

$(-)$ Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et si $p \in \mathbf{N}^*$, alors $f^p = \underset{x_0}{o}(g^p)$.

$(-)$ Plus généralement, si les fonctions f et g sont strictement positives sur un voisinage de x_0, si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et si $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, alors $f^\alpha = \underset{x_0}{o}(g^\alpha)$.

$(-)$ En particulier, si les fonctions f et g sont strictement positives sur un voisinage de x_0 et si $f = \underset{x_0}{o}(g)$, alors $\sqrt{f} = \underset{x_0}{o}(\sqrt{g})$.

$(-)$ Si $f_1 = \underset{x_0}{o}(g)$ et si $f_2 = \underset{x_0}{o}(g)$, alors $f_1 + f_2 = \underset{x_0}{o}(g)$.

Soit $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ et soit $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. Si $f = \underset{x_0}{o}(g)$ et si u est une fonction définie sur un domaine D_u telle que $u(D_u) \subset D$ et $\lim\limits_{t \to t_0} u(t) = x_0$, alors $f \circ u = \underset{t_0}{o}(g \circ u)$ en t_0.

✓ Cette dernière propriété permet d'effectuer des « changements de variable » dans une relation de négligeabilité.

[S1.5] Fonctions équivalentes : définition, notation

Soient f et g deux fonctions définies sur un domaine D.
Soit x_0 un point du domaine D ou une borne de D.
On dit que la fonction f est équivalente à la fonction g au voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}$, s'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 et une fonction réelle r, définie sur V_{x_0} tels que :

$$\forall x \in V_{x_0},\ f(x) = g(x)r(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} r(x) = 1.$$

On dit que f est équivalente à g au voisinage de $x_0 = +\infty$, s'il existe un voisinage $V_{+\infty}$ de $+\infty$ et une fonction réelle r, définie sur $V_{+\infty}$ tels que :

$$\forall x \in V_{+\infty},\ f(x) = g(x)r(x) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} r(x) = 1.$$

On a une définition similaire pour signifier que f équivalente à g au voisinage de $x_0 = -\infty$.

On note alors : $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et on lit « f est équivalente à g au voisinage de x_0 ».
S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement $f \sim g$ ou $f(x) \sim g(x)$.

✓ Un équivalent n'est vrai qu'au voisinage de x_0, c'est-à-dire localement.

On ne peut pas remplacer une fonction sur un intervalle quelconque par son équivalent en x_0.

[S1.6] Fonctions équivalentes : caractérisation et propriétés

Soit $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D. On étudie l'équivalence au voisinage de x_0.

Si pour tout x de V_{x_0}, $g(x) \neq 0$ alors :

$$f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

(−) $f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow f - g = \underset{x_0}{o}(g) \Longleftrightarrow f = g + \underset{x_0}{o}(g)$.

(−) $f + \underset{x_0}{o}(f) \underset{x_0}{\sim} f$.

(−) $f \underset{x_0}{\sim} g \Longrightarrow \underset{x_0}{o}(f) = \underset{x_0}{o}(g)$.

(−) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et que l'une des deux fonctions possède une limite finie ou infinie en x_0, alors l'autre fonction admet la même limite en x_0.

(−) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} L$ au voisinage de x_0.

(−) Si les fonctions f et g sont de même signe au voisinage de x_0, et si f ne s'annule pas au voisinage de x_0, alors il en est de même pour la fonction g.

[S1.7] Fonctions équivalentes et opérations

Soit $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. On considère des fonctions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 et h définies sur un même ensemble D. On étudie l'équivalence au voisinage de x_0.

(−) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, alors $f \underset{x_0}{\sim} h$.

(−) Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et si $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$.

(−) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $p \in \mathbf{N}^*$ alors $f^p \underset{x_0}{\sim} g^p$.

(−) Plus généralement, si les fonctions f et g sont strictement positives au voisinage de x_0, si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$.

(−) En particulier, si les fonctions f et g sont strictement positives au voisinage de x_0 et si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $\sqrt{f} \underset{x_0}{\sim} \sqrt{g}$.

(−) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si f et g ne s'annulent pas sur V_{x_0}, alors $\dfrac{1}{g} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{f}$.

Soient $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ et $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si u est une fonction définie sur un domaine D_u telle que $u(D_u) \subset D$ et $\lim\limits_{t \to t_0} u(t) = x_0$, alors : $f \circ u \underset{t_0}{\sim} g \circ u$.

✓ Cette dernière propriété permet d'effectuer des ≪ changements de variable ≫ dans les relations d'équivalence.

✓ Il n'existe pas dans le cours de propriété permettant d'ajouter ou de composer des équivalents.

✓ On n'écrit jamais $f(x) \sim 0$, sauf si la fonction f est égale à la fonction nulle sur un voisinage de x_0. En général, l'élève qui écrit $f(x) \sim 0$ a commis l'erreur d'ajouter des équivalents.

[S1.8] Équivalents classiques

$$\begin{gathered} e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, \\ ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \end{gathered}$$

c'est-à-dire :

$$ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1.$$

Pour tout réel α (α indépendant de x) :

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x.$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} - 1 &= (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x, \\ \sqrt{1-x} - 1 &= (1-x)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x, \\ \frac{1}{1+x} - 1 &= (1+x)^{-1} - 1 \underset{0}{\sim} -x, \\ \frac{1}{1-x} - 1 &= (1-x)^{-1} - 1 \underset{0}{\sim} x, \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 &= (1+x)^{-\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Tout polynôme non nul est équivalent à son monôme non nul de plus haut degré au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

Tout polynôme non nul est équivalent à son monôme non nul de plus bas degré au voisinage de 0.

[S1.9] Formules de Taylor-Young

Soit $x_0 \in \mathbf{R}$.

Formule à l'ordre 1

Si une fonction f est définie en x_0 et de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage V_{x_0} de x_0 alors :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x_0}{o}(x - x_0).$$

Formule à l'ordre 2

Si une fonction f est définie en x_0 et de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage V_{x_0} de x_0 alors :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \underset{x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big).$$

[S1.10] Développements limités d'ordre 1

Une fonction f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 s'il existe des réels a_0, a_1 tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \underset{0}{o}(x),$$

c'est-à-dire que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme de la somme d'une expression polynomiale de degré au plus 1 : $a_0 + a_1 x$, et d'une quantité négligeable devant x. L'expression $a_0 + a_1 x$ s'appelle la partie régulière du développement limité.

Plus généralement, soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Une fonction f de D dans $\mathbf{R}$ définie sur un voisinage V_{x_0} de x_0 admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 s'il existe des réels b_0 et b_1 tels que :

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \underset{x_0}{o}(x - x_0).$$

De manière équivalente, on dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 s'il existe des réels b_0 et b_1 et une fonction ε de D dans $\mathbf{R}$ tels que :

$$\forall x \in V_{x_0},\ f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

[S1.11] Propriétés des développements limités d'ordre 1

Si la fonction f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 alors ce développement limité est unique.

Soit f une fonction de D dans $\mathbf{R}$ et soit $x_0 \in D$.
La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0.
Dans ces conditions, les coefficients du développement limité sont :

$$b_0 = f(x_0) \text{ et } b_1 = f'(x_0)$$

et l'on a ainsi au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x_0}{o}(x - x_0).$$

De plus, si $f(x_0) \neq 0$, alors :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0).$$

De même, si $f'(x_0) \neq 0$, alors :

$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)\,(x - x_0).$$

✓ Un développement limité en x_0 d'une fonction f ne donne une information sur cette fonction qu'au voisinage de x_0. Il ne peut donc en aucun cas être utilisé en dehors de ce voisinage pour obtenir des résultats sur la fonction.

✓ Si la fonction f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $x_0 \in D$, alors on en déduit une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

✓ En posant $h = x - x_0$, h tend vers 0 quand x tend vers x_0 et l'on obtient :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \underset{0}{o}(h).$$

✓ Si la fonction f possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 de la forme $f(x) = a + b(x - x_0) + \underset{x_0}{o}(x - x_0)$ et si f n'est pas définie en x_0, on peut alors la prolonger par continuité en x_0 car $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

La fonction $g : x \mapsto \left| \begin{array}{lll} f(x) & \text{si} & x \neq x_0 \\ a & \text{si} & x = x_0 \end{array} \right.$ est le prolongement par continuité de la fonction f et cette fonction g est dérivable en x_0, de nombre dérivé b.

[S1.12] Développements limités d'ordre 1 classiques au voisinage de 0

Soit une quantité réelle u qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

$$ln(1 + u) = u + \underset{0}{o}(u),$$
$$e^u = 1 + u + \underset{0}{o}(u).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u + \underset{0}{o}(u).$$