Chapitre 1

Mécanique du point

1.1 Cinématique [MPSI]

Référentiel

► DÉFINITION : un **référentiel** $\mathcal{R}$ est un solide.

► Citons les référentiels
- héliocentrique de point fixe le centre du Soleil et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles lointaines,
- géocentrique de point fixe le centre de la Terre et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel héliocentrique,
- terrestre lié à la Terre (on l'appelle souvent référentiel du laboratoire) et donc en rotation autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique,
- lié à un véhicule (automobile, bateau, avion),
- lié à un manège ou un plateau en rotation autour de son axe.

Mobile ponctuel ou point matériel

► DÉFINITION : un **mobile ponctuel** ou **point matériel** est un corpuscule M de dimension nulle de masse m.

► Un point n'a pas de mouvement de rotation sur lui-même.

Cinématique du point matériel

► Soit $\mathcal{R}$ un référentiel, O un point fixe de $\mathcal{R}$, M un point matériel et t la date.

DÉFINITION : les trois grandeurs **cinématiques** sont :
- le **vecteur position** $\overrightarrow{OM}$
- le **vecteur-vitesse** $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$
- le **vecteur-accélération** $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$.

Les composantes du vecteur position sont exprimées en mètres (m) celles du vecteur-vitesse en mètres par seconde ($\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$) et celles du vecteur-accélération en mètres par seconde carrée ($\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$).

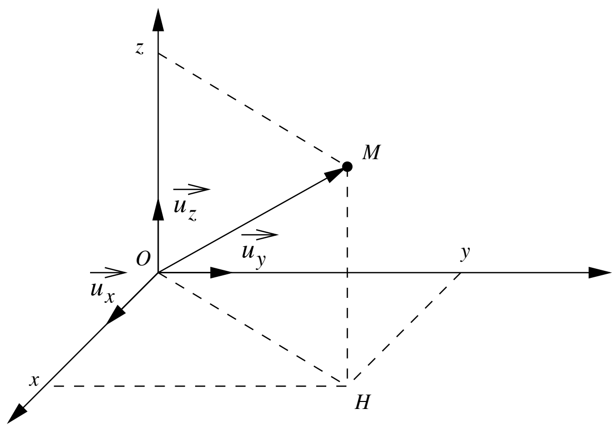
► Le vecteur-vitesse est tangent à la trajectoire et dans le sens du déplacement.

► Le vecteur-accélération indique l'infléchissement du mouvement.

Expression des vecteurs cinématiques dans les repères cartésien et cylindrique

► Soient O un point et $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ une base orthonormale fixes dans le référentiel $\mathcal{R}$. Soit M un point matériel ; le vecteur position se décompose dans cette base :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$



DÉFINITION : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forme un **repère cartésien** et

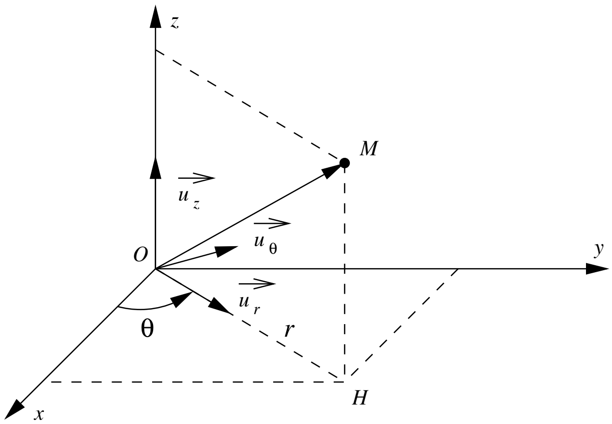
$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array} \right. , \qquad \vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right. , \qquad \vec{a} \left| \begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array} \right.$$

► Avec les notations du paragraphe précédent, soit H le projeté orthogonal de M sur le plan (O, x, y), on pose $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$, $\vec{u}_\theta$ qui complète la base orthonormale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On pose $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}_r)$ et $r = OH$; les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ sont mobiles dans $\mathcal{R}$ et on démontre que

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

Le vecteur position se décompose dans cette base :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$



DÉFINITION : $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ forme le **repère cylindrique suiveur** et

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{array} \right. , \qquad \vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{array} \right. , \qquad \vec{a} \left| \begin{array}{l} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{array} \right.$$

Mouvements particuliers

► Dans le cas du mouvement rectiligne, on peut définir l'axe (O, x) le long de la trajectoire du point matériel.

PROPRIÉTÉ : **mouvement rectiligne.**

– Le **mouvement rectiligne uniforme** est à vecteur-vitesse constant :

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0, \qquad \vec{v} = v_0 \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{a} = \vec{0}$$

où x_0 est l'abscisse initiale et v_0 la composante constante de la vitesse sur l'axe (O, x).

– Le **mouvement rectiligne uniformément accéléré** est à vecteur accélération constant et colinéaire au vecteur vitesse initial :

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 \cdot t + x_0, \qquad \vec{v} = (a_0 \cdot t + v_0) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{a} = a_0 \vec{u}_x$$

où x_0 est l'abscisse initiale, v_0 la composante initiale de la vitesse et a_0 la composante constante de l'accélération sur l'axe (O, x).

► Dans le cas du mouvement circulaire de centre O et de rayon R, on peut définir le repère cylindrique de centre O et dont l'axe (O, z) est perpendiculaire au plan du cercle.

PROPRIÉTÉ : **mouvement circulaire.**

- Le **mouvement circulaire uniforme** est à vitesse angulaire constante $\omega_0 = \dot{\theta}$ et à accélération centripète :

$$\theta(t) = \omega_0 \cdot t + \theta_0, \qquad r(t) = R, \qquad \vec{v} = R\omega_0 \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\omega_0^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$$

  où θ_0 est l'angle initial.
- Dans le cas du **mouvement circulaire quelconque**, le vecteur-vitesse est orthoradial, le vecteur-vitesse possède une composante radiale (ou normale) et une composante orthoradiale (ou tangentielle) :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \qquad v = R\dot{\theta} \quad \text{et} \quad \vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta$$

Exercice 1.1 : Détermination de trajectoires

Un mobile M est repéré dans le référentiel $(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y)$ ($\overrightarrow{u}_x$ est horizontal, $\overrightarrow{u}_y$ est vertical). Il possède un vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$, une accélération constante $\overrightarrow{a} \left| \begin{array}{l} -b \\ -g \end{array} \right.$ et à l'instant initial $x(0) = 0$ et $y(0) = h$. b, g, h et v_0 sont des constantes positives, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.
2. Dresser dans un même tableau les variations de ces deux fonctions (on distinguera trois cas).
3. En déduire dans chaque cas l'allure des trajectoires du mobile. À quelle situation réelle ce problème peut-il correspondre ?
4. Montrer que la trajectoire est une branche de parabole (éventuellement aplatie).

Exercice 1.2 : Mouvement spiral

Un mobile M est repéré par ses coordonnées polaires ; on donne $\dot{r} = v_0$ et $\dot{\theta} = \omega$. À la date $t = 0$, $r(0) = 0$ et $\theta(0) = 0$.

1. Déterminer à toute date les coordonnées de son vecteur vitesse et de son vecteur accélération.
2. Donner les équations horaires $(x(t), y(t))$ dans la base cartésienne.
3. Justifier que le mouvement est spiral. La norme de la vitesse varie-t-elle au cours du temps ?

1.2 Lois générales de la mécanique du point en référentiel galiléen [MPSI]

Loi de la quantité de mouvement

- DÉFINITION : $\mathcal{R}$ est un **référentiel galiléen** si tout point matériel isolé, c'est-à-dire ne subissant aucune force possède dans $\mathcal{R}$ un mouvement rectiligne uniforme.

- PROPRIÉTÉ : **loi de la quantité de mouvement.** Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et M un point matériel de masse m soumis à un ensemble de forces $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. La quantité de mouvement de M est la quantité $\vec{p} = m\vec{v}$ et

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

Loi du moment cinétique

- Soit O un point fixe du référentiel $\mathcal{R}$ et M un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$. Soit $\vec{f}$ une force s'exerçant sur M.

  DÉFINITION : le **moment cinétique** de M est

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

  DÉFINITION : le **moment en O de la force $\vec{f}$** est

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

- PROPRIÉTÉ : **loi du moment cinétique.** Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et M un point matériel de masse m soumis à un ensemble de forces $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i) = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

Lois de la puissance et de l'énergie cinétiques

- Soit O un point fixe du référentiel $\mathcal{R}$ et M un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$. Soit $\vec{f}$ une force s'exerçant sur M.

  DÉFINITION : l'**énergie cinétique** est

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2$$

Ec est exprimée en Joule (J).

DÉFINITION : le **travail élémentaire** de la force $\vec{f}$ lorsque M se déplace de $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OM}$ est

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \vec{f} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

La **puissance** de $\vec{f}$ est

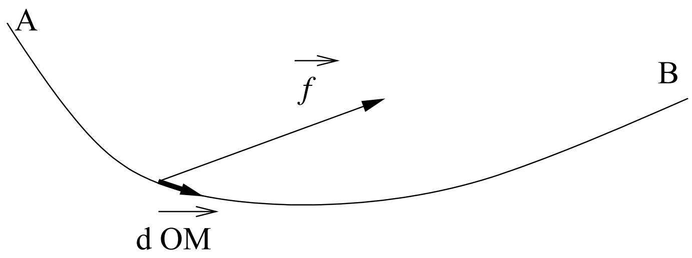
$$\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\vec{f} \cdot d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\delta W(\vec{f})}{dt}$$

δW s'exprime en Joule (J), $\mathcal{P}$ s'exprime en Watt ($\mathrm{W} = \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$).

► PROPRIÉTÉ : **loi de la puissance cinétique.** Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et M un point matériel de masse m soumis à un ensemble de forces $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\vec{f_i}) = \frac{dEc}{dt}$$

► Soit $\overset{\frown}{AB}$ le chemin décrit par M entre les points A et B.



DÉFINITION : le **travail** de la force $\vec{f}$ le long du déplacement $\overset{\frown}{AB}$ est

$$W_{AB}(\vec{f}) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \delta W(\vec{f}) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{f} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Cette quantité est ce qu'on appelle en mathématiques la **circulation** de $\vec{f}$ le long du chemin parcouru par M.

► PROPRIÉTÉ : **loi de l'énergie cinétique.** Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et M un point matériel de masse m soumis à un ensemble de forces $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$. Lorsque M se déplace de A à B selon le chemin $\overset{\frown}{AB}$,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{\overset{\frown}{AB}}(\vec{f_i}) = Ec(B) - Ec(A)$$

Loi de l'énergie mécanique

► DÉFINITION : soit $\vec{f}$ une force s'exerçant sur un point matériel M ; $\vec{f}$ est une **force conservative** si son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi $\widehat{AB}$.

► En particulier, si $A = B$, le travail de $\vec{f}$ sur toute boucle dont A est le point de départ et le point d'arrivée est nul :

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Ceci entraîne une propriété mathématique d'analyse vectorielle qui permet de définir l'énergie potentielle.

PROPRIÉTÉ : si le travail d'une force $\vec{f}$ le long de toute boucle fermée est nul, alors il existe une grandeur scalaire Ep ne dépendant que de la position de M appelée **énergie potentielle** :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, Ep \quad \text{ou} \quad dEp = -\delta W$$

Le travail de $\vec{f}$ ne dépend alors que des positions initiale A et finale B de M :

$$W_{AB}(\vec{f}) = Ep(A) - Ep(B)$$

La détermination de l'expression de l'énergie potentielle associée à une force nécessite un calcul de primitive. Voici la traduction algébrique de la relation $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, Ep$ dans une base cartésienne et dans une base cylindrique :

$$\left\{\begin{array}{l} f_x = -\frac{\partial Ep}{\partial x} \\ f_y = -\frac{\partial Ep}{\partial y} \\ f_z = -\frac{\partial Ep}{\partial z} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} f_r = -\frac{\partial Ep}{\partial r} \\ f_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial Ep}{\partial \theta} \\ f_z = -\frac{\partial Ep}{\partial z} \end{array}\right.$$

Les énergies potentielles sont définies à une constante additive près. La **référence** est la position de M où on prend $Ep = 0$ par convention.

► DÉFINITION : soit M un point matériel. Parmi les forces qu'il subit, on distingue les forces $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k$ conservatives qui dérivent des énergies potentielles $Ep_1, \ldots, Ep_k$ et les forces $\vec{f}_{k+1}, \ldots, \vec{f}_n$ non conservatives. L'**énergie mécanique** est

$$Em = Ec + Ep \quad \text{avec} \quad Ep = \sum_{i=1}^{k} Ep_i$$

Em s'exprime en Joule (J).

▶ PROPRIÉTÉ : **loi de l'énergie mécanique** : Soit M un point matériel se déplaçant de A à B selon le chemin $\widehat{AB}$; alors

$$Em_B - Em_A = \sum_{i=k+1}^{n} W_{\widehat{AB}}(\vec{f_i})$$

Dans le cas particulier où toutes les forces subies par M sont conservatives,

$$Em = \text{cste} \quad \text{donc} \quad Em_A = Em_B \quad \text{et} \quad \frac{dEm}{dt} = 0$$

Forces usuelles et énergies potentielles associées

▶ Dans tout ce paragraphe, M est un point matériel de masse m.

force	expression	énergie potentielle
poids $\vec{g}$ vertical	$\vec{P} = m\vec{g}$	$Ep_p = mgz$ (z vertical vers le haut)
rappel ressort fixé en E **tension**	$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$ $\ell = EM$ et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{EM}}{EM}$ $\vec{T}$ colinéaire au fil	$Ep_\ell = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$
action d'un support	$\vec{T}$ // au support $\vec{N} \perp$ au support	non conservative ne travaille pas
frottement linéaire **frottement quadratique**	$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ $\vec{f} = -k\Vert\vec{v}\Vert\vec{v}$	non conservative non conservative
Lorentz	$\vec{f}_L = q\left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right]$ $\vec{f}_{\text{elec}} = q\vec{E}$ $\vec{f}_{\text{magn}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$	 $Ep_{\text{elec}} = qV$ ne travaille pas
gravitationnelle	$\vec{f} = -\frac{\mathcal{G}m_S m}{r^2}\vec{u}_r$ $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ et $r = OM$	$Ep_g = -\frac{\mathcal{G}m_S m}{r}$
de Coulomb	$\vec{f}_C = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ et $r = OM$	$Ep_C = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Exercice 1.3 : Chute libre avec frottement fluide

Une pierre de masse m est lachée d'une hauteur H sans vitesse initiale. Elle subit, outre son poids, une force de frottement fluide linéaire d'expression $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$.