Chapitre 1

Éléments cinétiques d'un système de deux points matériels

Conformément au programme des sections MPSI et PCSI, on se limite ici au système de deux points matériels pour lequel on définit les principales grandeurs cinématiques. On insiste sur le sens physique de ces grandeurs ; on mentionne à titre indicatif comment on peut généraliser au système de n points matériels qui sera vu en deuxième année.

1.1 Description d'un système de points matériels

1.1.1 Comment décrire qualitativement un système de points ?

▶ La définition d'un système est évidente.

> DÉFINITION : Un **système de deux points matériels** est un système de deux mobiles ponctuels de masses respectives fixes.

Ce n'est là qu'un modèle : les deux mobiles ne sont jamais parfaitement ponctuels, mais on peut souvent assimiler chacun d'eux à son point central affecté de la masse du mobile.

▶ La notation la plus fréquente est la suivante : les deux points et toutes les grandeurs qui leurs sont associées sont notées avec un indice 1 ou 2. Les mobiles sont M_1 et M_2, leurs masses respectives m_1 et m_2 ; le système est

$$\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$$

La généralisation au système à n corps est alors naturelle : le système est

$$\{(M_i, m_i)/i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

▶ On peut trouver des exemples à toutes les échelles de taille :

- deux corpuscules en physique subatomique dans le modèle classique : deux protons, un proton et un électron, un noyau positif et un électron, ... ;
- deux atomes, deux ions, deux molécules ;

- deux grains de sable, deux cailloux, un ballon de basket et une balle de tennis de table ;
- deux abeilles, deux poissons, deux individus, une automobile et un cycliste ;
- deux astéroïdes, une planète et un de ses satellites ;
- une étoile et une planète, deux étoiles, deux galaxies.

Dans le système à n corps, on peut considérer dans l'ordre - un ensemble de n électrons, - les ions chlorure et sodium formant un cristal de sel, - les grains de sable dans un sablier, - une mêlée de rugby, - Jupiter et ses satellites, - le système solaire.

▶ La description d'un essaim d'abeilles, d'un banc de poissons, d'un groupe de manchots sur la banquise, d'une classe d'enfants dans une cour de récréation, ou d'un groupe d'étoiles dans une galaxie sont très révélateurs de ce qui va suivre dans ce chapitre. On peut toujours s'accrocher à la description **individuelle** de chaque individu composant le système. Mais cette description est laborieuse : pour chacun, dans un référentiel donné, on doit définir les trois coordonnées de position et les trois coordonnées du vecteur vitesse.

▶ On va montrer qu'il est possible de définir des **grandeurs cinématiques globales** pour le système ; si on comprend bien leur sens physique, on verra qu'elles synthétisent bien les propriétés globales du mouvement du système.

▶ Enfin, on établira dans les deux chapitres suivants que ces grandeurs globales vérifient des lois mécaniques qui sont très proches de celles établies en mécanique du point ; ceci achèvera de montrer l'utilité de ces grandeurs.

▶ *Notons que le lecteur peut être tenté de continuer de travailler sur chaque mobile individuellement. Ce serait une grave erreur :*

- *D'une part, il renoncerait ainsi aux résultats établis dans ce cours, et risquerait alors d'avoir beaucoup de mal à établir "à la main" les lois du mouvement.*
- *D'autre part, les réflexes et techniques de calcul de la mécanique des systèmes ne seraient pas acquis : ce serait très problématique car le système à deux corps est précisément une introduction au système à n corps, puis au solide vus en deuxième année.*

1.1.2 Qu'est-ce que la résultante cinétique d'un système ?

▶ La résultante cinétique est le vecteur somme des vecteurs quantités de mouvement des deux mobiles.

DÉFINITION : La **résultante cinétique** du système $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$ est le vecteur

$$\overrightarrow{P} = m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2}$$

La notion se généralise aisément dans le cas d'un système de n points matériels : $\overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i}$.

- Donnons le sens physique de ce vecteur. La norme de la résultante cinétique est exprimée en kilogramme mètre par seconde ($kg \cdot m \cdot s^{-1}$). Elle est homogène à une quantité de mouvement. Sa direction et son sens sont ceux du déplacement global du système vu d'assez loin pour ne plus distinguer les deux mobiles. Cette interprétation sera justifiée au paragraphe 1.3.

- Quatre exemples illustratifs vont nous accompagner pour toute la suite de ce chapitre. À une date t arbitraire, dans le référentiel muni du repère orthonormé fixe $(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$, on donne les coordonnées des deux points matériels M_1 et M_2 affectés des masses m_1 et m_2 et de leurs vecteurs vitesses $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

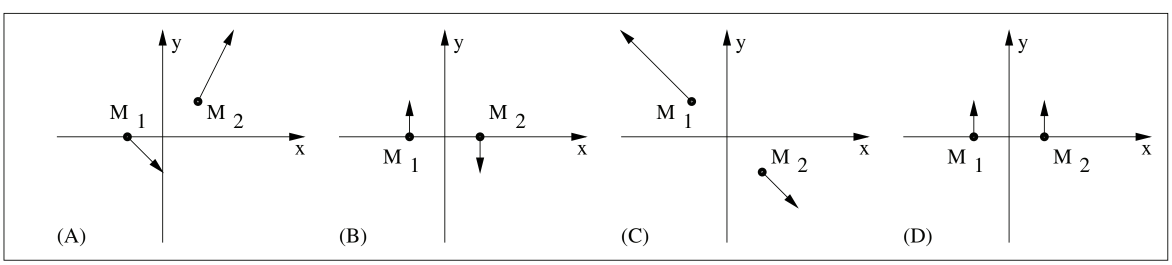
$$(A) \;:\; m_1 = 2kg \;;\; M_1 \left| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \;;\; \overrightarrow{v_1} \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad m_2 = 1kg \;;\; M_2 \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. \;;\; \overrightarrow{v_2} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$(B) \;:\; m_1 = 1kg \;;\; M_1 \left| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \;;\; \overrightarrow{v_1} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad m_2 = 1kg \;;\; M_2 \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \;;\; \overrightarrow{v_2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$(C) \;:\; m_1 = 1kg \;;\; M_1 \left| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. \;;\; \overrightarrow{v_1} \left| \begin{array}{c} -2 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad m_2 = 2kg \;;\; M_2 \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right. \;;\; \overrightarrow{v_2} \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right.$$

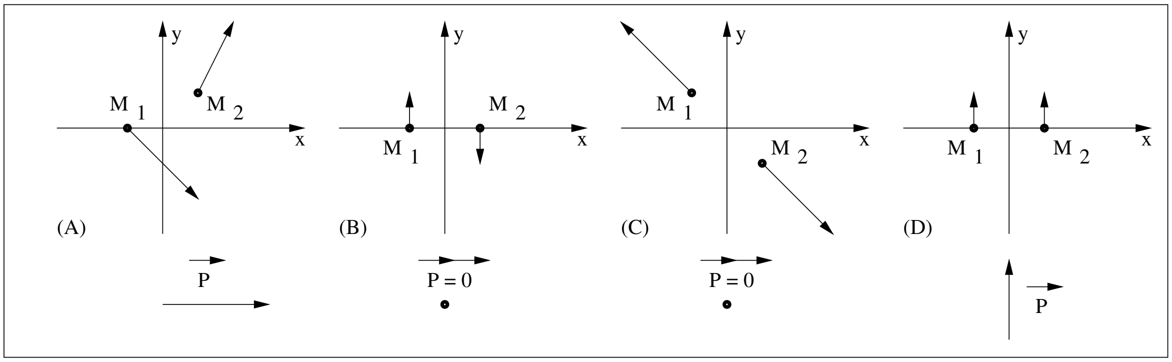
$$(D) \;:\; m_1 = 1kg \;;\; M_1 \left| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \;;\; \overrightarrow{v_1} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad m_2 = 1kg \;;\; M_2 \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \;;\; \overrightarrow{v_2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right.$$

Les schémas en vitesses sont les suivants :



On en déduit les schémas en quantités de mouvement en multipliant les vitesses par les masses. Les résultantes cinétiques sont tracées dans les quatre cas, en sommant les quantités de mouvement :

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2}$$



Il apparaît successivement :

- (A) : les deux points vont vers la droite, l'un monte, l'autre descend, et la résultante cinétique est dirigée vers la droite.
- (B) : les deux points sont de même masse, l'un monte, l'autre descend, et la résultante cinétique est nulle.
- (C) : l'un va vers le haut et la gauche, l'autre vers le bas et la droite, celui de masse double a une vitesse deux fois moins importante en norme, et la résultante cinétique est nulle.
- (D) : les deux points vont vers le haut, et la résultante cinétique est dirigée vers le haut.

1.1.3 Qu'est-ce que le moment cinétique d'un système en un point ?

► Soit O un point fixe du référentiel de travail. Le moment cinétique en O est le vecteur somme des vecteurs moments cinétiques en O des deux mobiles.

DÉFINITION : Le **moment cinétique** en O du système $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$ est le vecteur

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM_1} \wedge m_1 \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge m_2 \overrightarrow{v_2}$$

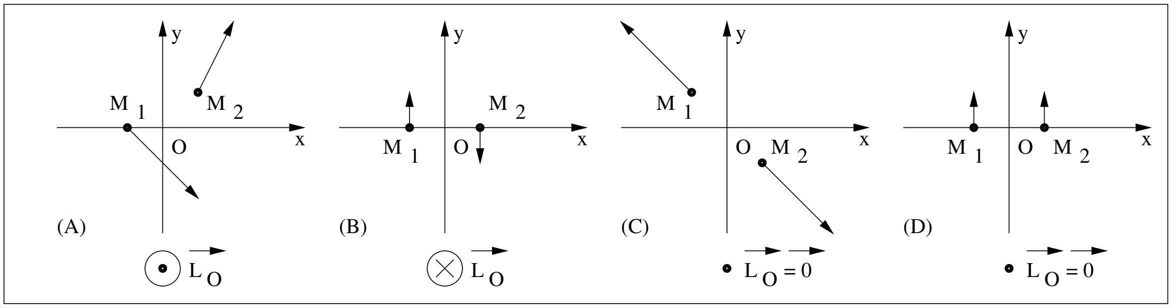
La notion se généralise aisément dans le cas d'un système de n points matériels : $\overrightarrow{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v_i}$.

► Donnons le sens physique de ce vecteur. La norme du moment cinétique est exprimée en kilogramme mètre carré par seconde ($kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$). Sa direction est celle de l'axe de rotation globale du système autour de O. Son sens est celui donné par la règle du tire-bouchon cohérent avec le sens de rotation globale du système autour de O.

► Reprenons les exemples précédents mais faisons précéder, cette fois-ci, le calcul du moment cinétique en O par l'interprétation physique. Il apparaît clairement :

- (A) : les points semblent tourner dans le sens trigonométrique autour de O dans le plan (O, x, y, z) : le moment cinétique en O doit donc être selon $\overrightarrow{u}_z$.
- (B) : les points semblent tourner dans le sens des aiguilles d'une montre autour de O dans le plan (O, x, y, z) : le moment cinétique en O doit donc être selon $-\overrightarrow{u}_z$.

– (C) : les points ne tournent pas autour de O, mais s'en éloignent : le moment cinétique est nul.
– (D) : les points ne tournent pas autour de O mais passent de part et d'autre : le moment cinétique est nul.



On vérifie ces affirmations par le calcul (à l'occasion, le lecteur pourra s'assurer qu'il maîtrise bien le produit vectoriel) :

$$(A) \ : \ \overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM_1}\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge m_1\overrightarrow{v_1}\begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} + \overrightarrow{OM_2}\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge m_2\overrightarrow{v_2}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$(B) \ : \ \overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM_1}\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge m_1\overrightarrow{v_1}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \overrightarrow{OM_2}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge m_2\overrightarrow{v_2}\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$(C) \ : \ \overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM_1}\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge m_1\overrightarrow{v_1}\begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \overrightarrow{OM_2}\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge m_2\overrightarrow{v_2}\begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$(D) \ : \ \overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM_1}\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge m_1\overrightarrow{v_1}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \overrightarrow{OM_2}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge m_2\overrightarrow{v_2}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

1.1.4 Qu'est-ce que l'énergie cinétique d'un système ?

► Dans le référentiel de travail, l'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques individuelles.

DÉFINITION : L'**énergie cinétique** du système $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$ est la quantité positive :

$$Ec = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

La notion se généralise aisément dans le cas d'un système de n points matériels : $Ec = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_iv_i^2$.

- Donnons le sens physique de cette grandeur. L'énergie cinétique est exprimée en joule (J). Elle est positive et ne peut être nulle que si tous les points sont immobiles dans le référentiel d'étude, et elle exprime l'agitation des points du système. Ainsi, l'énergie cinétique d'une classe d'enfants est à peu près nulle quand ils sont assis à leurs places, elle devient plus grande lorsqu'ils sortent, et elle devient importante quand ils courent dans la cour de récréation (dans toutes les directions) ou vers le portail de sortie (tous dans la même direction).
- Reprenons les exemples précédents.
  - L'observation des cas (B) et (D) indique que les énergies cinétiques sont égales. On comprend au passage que la simple énergie cinétique ne suffit pas à caractériser l'état cinétique d'un système car ces deux situations sont distinguées par leurs résultante et moment cinétiques : le cas (B) est une situation de "cour de récréation" (les enfants tournent autour de O ($\overrightarrow{L}_O \neq \overrightarrow{0}$), mais n'ont pas de mouvement global ($\overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$)) alors que le cas (D) est une situation de "course vers le portail" (les enfants ne tournent plus autour de O ($\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{0}$), mais se dirigent globalement vers le haut ($\overrightarrow{P} \neq \overrightarrow{0}$)).
  - Dans les cas (A) et (C), les énergies cinétiques sont sensiblement plus grandes que dans les deux autres cas. On remarquera dans le cas (C) qu'une grande valeur de l'énergie cinétique est possible sans pour autant que le système ne se déplace ni ne tourne globalement autour de O ($\overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{0}$).

  Les calculs sont immédiats et ne demandent qu'un peu de soin :

$$(A)\ :\ Ec = \frac{1}{2}2(\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}1(\sqrt{5})^2 = 4,5J$$

$$(B)\ :\ Ec = \frac{1}{2}1(1)^2 + \frac{1}{2}1(1)^2 = 1J$$

$$(C)\ :\ Ec = \frac{1}{2}1(2\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}2(\sqrt{2})^2 = 6J$$

$$(D)\ :\ Ec = \frac{1}{2}1(1)^2 + \frac{1}{2}1(1)^2 = 1J$$

- *Ces calculs complètent l'étude détaillée de ces quatre exemples simples ; nous encourageons vivement le lecteur à s'assurer qu'il a bien compris grâce à eux le sens physique profond des trois grandeurs cinétiques : la résultante, le moment et l'énergie. Si un doute persiste, ou si la moindre confusion s'est installée, nous l'encourageons à revenir sur ce qui précède, car c'est la base de tout ce qui suit dans cet ouvrage, et dans la mécanique des systèmes et du solide en deuxième année.*

1.2 Référentiel barycentrique

1.2.1 Qu'est-ce que le barycentre d'un système ?

- Le barycentre est une notion géométrique bien connue. Elle s'avère très utile en physique des systèmes de points matériels.

DÉFINITION : Le **barycentre** ou **centre de masse** du système $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$ est le point G défini par

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{0}$$

- Toutes les techniques de calcul et de raisonnement vues en mathématiques dans les études secondaires permettent d'établir la plupart des résultats qui vont être énoncés. En premier lieu, si O désigne un point fixe du référentiel de travail, son introduction dans la relation vectorielle donne :

$$m_1\overrightarrow{GO} + m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{GO} + m_2\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{0}$$

On en déduit :

PROPRIÉTÉ : Soit O un point fixe et (O, x, y, z) un repère défini dans le référentiel de travail. Le **barycentre** du système $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$ peut être défini par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$

Ses coordonnées sont les moyennes pondérées de celles des deux points :

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \;;\; y_G = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \;;\; z_G = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$$

La notion se généralise aisément dans le cas d'un système de n points matériels : $x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_ix_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$; $y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_iy_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$; $z_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_iz_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$.

1.2.2 Comment calcule-t-on le vecteur vitesse du barycentre ?

- Soit G le barycentre du système $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$. Soit $(\mathcal{R})$ le référentiel d'étude et O un point fixe de $(\mathcal{R})$. Dérivons par rapport au temps dans $(\mathcal{R})$ l'expression de $\overrightarrow{OG}$:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}$$

On reconnaît les expressions des vecteurs vitesse de G, M_1 et M_2 dans $(\mathcal{R})$.

- On en déduit :

PROPRIÉTÉ : Le vecteur **vitesse du barycentre** de deux points matériels est la moyenne pondérée par les masses des vecteurs vitesse des deux points :

$$\overrightarrow{v}_G = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}$$

1.2.3 Une autre expression de la résultante cinétique

► Une loi corollaire de celle donnant $\vec{v}_G$ permet de donner une expression simple de la résultante cinétique du système. Il suffit d'effectuer le produit en croix dans l'égalité précédente :

$$(m_1 + m_2)\vec{v}_G = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = \vec{P}$$

► On en déduit :

PROPRIÉTÉ : Soit G le barycentre du système $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$. Soit $m = m_1 + m_2$ la **masse totale du système**. La **résultante cinétique** du système peut s'écrire :

$$\vec{P} = m\vec{v}_G$$

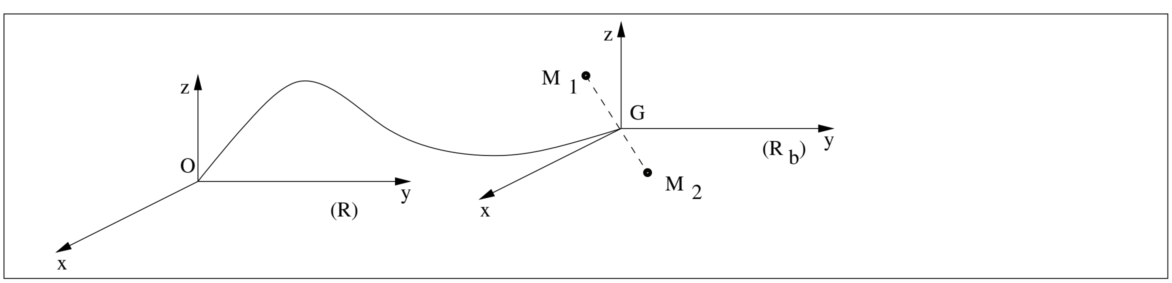
1.2.4 Qu'est-ce que le référentiel barycentrique ?

► L'observation animalière d'un banc de poissons, d'un essaim d'abeilles ou d'une colonie de manchots est instructive. Le déplacement du groupe ne se résume pas à une simple translation : autour du barycentre en mouvement, on peut observer un mouvement individuel complexe. De façon encore plus synthétique, on peut dire que le mouvement de l'essaim est décomposé en celui de la reine (assimilé au mouvement du point G) et celui des abeilles autour de la reine.

► On est ainsi amené à définir le référentiel barycentrique qui permettra d'exprimer le "point de vue de la reine des abeilles".

DÉFINITION : Soit $(\mathcal{R})$ un référentiel galiléen dont on extrait un point O et trois axes non coplanaires de directions fixes (O, x), (O, y) et (O, z). Soit G le barycentre du système $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$. Le **référentiel barycentrique** est celui dans lequel G est un point fixe et dans lequel les trois axes parallèles $(G, x)//(O, x)$, $(G, y)//(O, y)$ et $(G, z)//(O, z)$ gardent des directions fixes. On peut noter en résumé

$$(\mathcal{R}) = (O, x, y, z) \quad \text{et} \quad (\mathcal{R}_b) = (G, x, y, z)$$



► Le référentiel barycentrique $(\mathcal{R}_b)$ est en translation par rapport au référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Il n'est lui-même galiléen que si cette translation est rectiligne uniforme. On peut donc énoncer un résultat qui sera utile au chapitre 7.