E3A/E4A
Filière MP 2005
Épreuve A

Preuve d'une égalité fonctionnelle

Partie I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle sur I :

$$y'' + y = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur I est

$$\{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}\cdot$$

2. Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur I. Que peut-on dire des suites $\big(g(n\pi)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(g\big(\frac{2n+1}{2}\pi\big)\big)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$. On suppose que $g(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que g est la fonction nulle.

Partie II

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$:
$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$.
Soit $y = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$. On note h_v l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_v : x \mapsto (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x).$$

On note V l'ensemble des applications h_v lorsque v parcourt $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

2. Démontrer que l'application qui envoie le vecteur v sur h_v définit un isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et V. En déduire que $\mathcal{B} = \{h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4}\}$ est une base de V.

3. Soit $v = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$. Exprimer l'application $x \mapsto h_v''(x) + h_v(x)$. On note $\psi(h_v)$ cette application.

(i) Démontrer que ψ est un endomorphisme de V.

(ii) Déterminer le noyau de ψ Quel est le rang de ψ ?

(iii) Expliciter la matrice de ψ sur la base de V, notée $\mathcal{B}$, déterminée à la question 2. En déduire une base de l'image de ψ.

4. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y'' + y = \cos(x) \qquad (\mathcal{E}_1)$
Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$.

Dans le reste du problème, on considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^\star$: $\quad y'' + y = \dfrac{1}{x} \qquad (\mathcal{E})$.

Partie III

Dans cette partie, on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

1. Soit x un réel positif.

1.a. Démontrer l'inégalité : $\forall t \in \mathbb{R}_+, F(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

1.b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x,t)dt$ est convergente.

On peut donc définir sur $\mathbb{R}_+$ une fonction G en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, G(x) = \int_0^{+\infty} F(x,t)dt.$$

2. En utilisant l'inégalité démontrée en 1.a, justifier que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

3. On se propose de démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Soit ε un réel strictement positif.

3.a. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ au point (x,t).

3.b. En utilisant l'inégalité : $\forall x \in]\varepsilon, +\infty[\,, \forall t \in \mathbb{R}_+, \dfrac{te^{-tx}}{1+t^2} \leqslant e^{-t\varepsilon}$ que l'on justifiera, démontrer les points suivants :

(i) Pour $x \geqslant \varepsilon$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt$ est convergente.

(ii) G est dérivable sur l'intervalle $[\varepsilon, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]\varepsilon, +\infty[\,, G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt.$$

3.c. Conclure.

4. En suivant les mêmes étapes que pour la question 3, démontrer que G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que sa dérivée seconde vérifie :

$$\forall x \in]\varepsilon, +\infty[\,, G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}dt.$$

5. Montrer que G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

6.a. Démontrer que G est une application décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

6.b. En déduire que $G(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. Déterminer cette limite.

Partie IV

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

On suppose que f vérifie les quatre conditions suivantes :

a. f est positive,

b. f est décroissante,

c. $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$,

d. L'application g définie, pour tout t dans $\mathbb{R}_+^\star$, par $g(t) = tf(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs. On suppose que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Montrer que la série de terme général $(-1)^n f(u_n)$ est convergente (on énoncera précisément le théorème utilisé).

2. Montrer que $\sin(t)f(t)$ admet une limite lorsque t tend 0 par valeurs supérieures. En déduire, que la fonction $\mapsto |\sin(t)|f(t)$ est intégrable sur l'intervalle $[0, x]$, pour tout réel $x > 0$.

Soit n un entier naturel non nul. On pose w_n le réel défini par :

$$w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|f(t)dt.$$

3.a. Justifier l'encadrement : $2f\big((n+1)\pi\big) \leqslant w_n \leqslant 2f(n\pi)\big)$.

3.b. En déduire qu'il existe u_n dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $w_n = f(u_n)$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

3.c. Montrer que : $w_n = (-1)^n \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)f(t)dt$.

4. On considère les deux suites

$$\Big(\int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)dt\Big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \Big(\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)dt\Big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

4.a. Montrer que la première suite est croissante.

4.b. Montrer que la seconde suite est décroissante.

4.c. En comparant les termes de ces deux suites, établir la convergence de chacune d'entre elles vers une limite ℓ commune.

Pour tous réels x et y, tels que $0 < x \leqslant y$, on pose :

$$I_f(x, y) = \int_x^y \sin(t)f(t)dt.$$

5. Déduire de 4. que $I_f(x, y)$ admet une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$. On note $\displaystyle\int_x^{+\infty} \sin(t)f(t)dt$ cette limite.

6. Soit x un réel positif. Justifier l'existence de $I_x = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Partie V

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que la fonction h_x définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par : $h_x(t) = \dfrac{1}{x+t}$ vérifie les hypothèses de la partie IV.
On peut donc définir une fonction H sur $\mathbb{R}_+^\star$ en posant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt.$$
2. En effectuant un changement de variables, démontrer l'égalité
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt.$$
3. En développant $\sin(t-x)$, démontrer que H est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, H''(x) + H(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$
4. Quelle est la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
5. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, H(x) = G(x)$
la fonction G étant définie dans la partie III.

Connaissances utiles

- Équations différentielles.
- Intégrales sur un intervalle.

Solution

Partie I

1. $(\mathcal{E}_0)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$. Les fonctions sin et cos constituant un système fondamental de solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur I, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur I est
$$\{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}\cdot$$
2. *Remarque :* une première erreur ou imprécision de l'énoncé il faut supposer que $I = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+ \subset I$ pour définir $g(n\pi), n \in \mathbb{N}$.

Si g est solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.
$g(n\pi) = (-1)^n A$. Donc si $A \neq 0$, la suite $(g(n\pi))_{n \geqslant 0}$ n'a pas de limite.

$g\Big(\dfrac{2n+1}{2}\pi\Big) = (-1)^n B$. Donc si $B \neq 0$, la suite considérée n'a pas de limite.

3. On déduit des questions 1. et 2. que si g est solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$, et si $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ alors $A = B = 0$ *i.e.* g est la fonction nulle.

Partie II

1. $h_v = ah_{e_1} + bh_{e_2} + ch_{e_3} + dh_{e_4}$ et pour tout $i \in [\![1,4]\!], h_{e_i} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, donc $V = \mathrm{Vect}\{h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4}\}$ *i.e.* V est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{B}$.

2. Pour $(\lambda, v, v') \in \mathcal{L} \times V \times V$, notons $v = (a,b,c,d)$ et $v' = (a',b',c',d')$.

$h_{\lambda v+v'} = (\lambda a + a')h_{e_1} + (\lambda b + b')h_{e_2} + (\lambda c + c')h_{e_3} + (\lambda d + d')h_{e_4}$.

Donc $h_v = \lambda h_v + h_{v'}$. L'application $\mathbb{R}^4 \to V, v \mapsto h_v$ est donc linéaire. Elle est surjective par définition.

$h_v = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x) = 0 \qquad (1).$

$(1) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, 2ak\pi + b = 0 = \Big(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\Big)c + d \Rightarrow v = 0$ en effet, les polynômes $aX + b$ et $cX + d$ ayant une infinité de racines sont le polynôme nul.

Comme $h_v = 0$ implique $v = 0$, l'application linéaire $v \mapsto h_v$ est injective. On peut conclure que $v \mapsto h_v$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Il en résulte que $\dim[V] = \dim[\mathbb{R}^4] = 4$. La famille $\mathcal{B}$ de cardinal 4 étant génératrice de V constitue une base de V.

3. $h_v(x) = ax\cos(x) + cx\sin(x) + k(x)$ où k est solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Leibniz, on a : $h_v''(x) + h_v(x) = (-ax+2c)\cos(x) - (cx+2a)\sin(x)$
$h_v''(x) + h_v(x) = (b+2c)\cos(x) + (-2a+d)\sin(x)$.

(i) ψ est linéaire car la dérivation l'est. $\psi(V) \subset V$ d'après le calcul précédent, donc $\psi \in \mathcal{L}(V)$.

(ii) $h_v \in \mathrm{Ker}(\psi) \iff \forall x \in \mathbb{R}, (b+2c)\cos(x) + (-2a+d)\sin(x) = 0$.
(h_{e_2}, h_{e_4}) étant libre, $h_v \in \mathrm{Ker}(\psi) \iff b + 2c = 0 = d - 2a$.
Donc $h_v \in \mathrm{Ker}(\psi) \iff h_v = a(h_{e_1} + 2h_{e_4}) + c(h_{e_3} - 2h_{e_2})$.
$\{h_{e_1} + 2h_{e_4}, h_{e_3} - 2h_{e_2}\}$ étant libre, $\mathrm{Ker}(\psi)$ est le plan vectoriel de V engendré par $\{h_{e_1} + 2h_{e_4}, h_{e_3} - 2h_{e_2}\}$· On déduit du théorème du rang :
$\mathrm{rg}(\psi) = \dim(V) - \dim\big[\mathrm{Ker}(\psi)\big] = 2$.

D'après le calcul précédent, $\psi(h_v) = (b+2c)h_{e_2} + (d-2a)h_{e_4}$.
(h_{e_2}, h_{e_4}) est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}(\psi)$. C'est une base de $\mathrm{Im}(\psi)$.

$$M_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $h_v'' + h_v = h_{e_2} \iff b + 2c = 1$ et $d - 2a = 0$.

En prenant $d = 0 = b = 0$ et $c = \dfrac{1}{2}$, on voit que $x \mapsto \dfrac{x\sin(x)}{2}$ est une solution de $(\mathcal{E}_1)$. D'après le cours, la solution générale de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction : $x \mapsto \dfrac{x\sin(x)}{2} + A\cos(x) + B\sin(x)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Partie III

1.a. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 < e^{-u} \leqslant 1$. Donc

$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2, 0 < F(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

1.b. La fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.
$\dfrac{1}{1+t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2, 0 < F(x,t) \leqslant \varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$
où φ est une fonction indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de continuité des intégrales paramétrées, $G \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

3.a. En tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}_+)^2$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{te^{-tx}}{1+t^2}$

3.b. $\forall t \in \mathbb{R}, |t| \leqslant \dfrac{1}{2}(1+t^2) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leqslant \dfrac{t}{1+t^2} \leqslant 1$.
exp étant croissante sur $\mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [\varepsilon, +\infty[, 0 < e^{-xt} \leqslant e^{-t\varepsilon}$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [\varepsilon, +\infty[, 0 \leqslant \dfrac{te^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-t\varepsilon}$.

(i) $t \mapsto e^{-t\varepsilon}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de l'inégalité précédente l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ sur $\mathbb{R}_+$.

(i) Les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales paramétrées étant vérifiées, on peut affirmer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, +\infty[$ et
$\forall x \in [\varepsilon, +\infty[, G'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt$

3.c. Tout ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$, on peut conclure que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que l'égalité précédente est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

4. $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$.
Comme $0 \leqslant \dfrac{t^2}{1+t^2} \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [\varepsilon, +\infty[, 0 \leqslant \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-t\varepsilon}.$$

D'où, comme en III.3.b.(ii) l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales paramétrées étant vérifiées, on peut affirmer que G' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, +\infty[$ et
$\forall x \in [\varepsilon, +\infty[,\ G''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}dt.$
Tout ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$, on peut conclure que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que l'égalité précédente est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

5. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, G''(x) + G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\cdot$

6.a. $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in]0, +\infty[, 0 \leqslant \dfrac{te^{-xt}}{1+t^2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, G'(x) \leqslant 0.$
D'où la décroissance de G sur $\mathbb{R}_+$. De même, $G''(x) \geqslant 0$ si $x \in \mathbb{R}_+^\star$ implique la convexité de G sur $\mathbb{R}_+$.

6.b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \dfrac{1}{x} = G(x) + G''(x) \geqslant G(x) \geqslant 0.$
Par encadrement, $G(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$

Partie IV

1. Posons $v_n = (-1)^n f(u_n)$. La série $\sum v_n$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées. En effet, $|v_n| = f(u_n)$ d'après a.

(u_n) étant croissante et f décroissante, la suite $(|v_n|)$ est décroissante. Comme $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ et d'après c. on a $|v_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$

2. $|\sin(t) f(t)| \leqslant |t| f(t) = |g(t)|$ car $f \geqslant 0$ et $|\sin(t)| \leqslant |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

D'après d. et par encadrement, $\sin(t)f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. Donc $t \mapsto |\sin(t)f(t)|$ est continue par morceaux sur le segment $[0,x]$ donc intégrable sur $[0,x]$ pour tout $x > 0$.

3.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n$ existe.

f étant décroissante et $|\sin| \geqslant 0$, on a :
$\forall t \in [n\pi, (n+1)\pi], |\sin(t)| f((n+1)\pi) \leqslant |\sin(t)| f(t) \leqslant |\sin(t)| f(n\pi).$
Avec l'inégalité de la moyenne, on peut écrire :
$f((n+1)\pi) I_n \leqslant \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| f(t) dt \leqslant f(n\pi) I_n$ où $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt.$
Par changement de variable affine, $t = n\pi + u$, on a $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin = 2.$

D'où le résultat.

3.b. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, f((n+1)\pi) \leqslant \dfrac{w_n}{2} \leqslant f(n\pi).$

f étant continue sur le segment $[n\pi, (n+1)\pi]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $u_n \in [n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $\dfrac{w_n}{2} = f(u_n).$

3.c. Si $t \in [2p\pi, (2p+1)\pi], \sin(t) = |\sin(t)|$ et si $t \in [(2p+1)\pi, (2p+2)\pi]$ on a $\sin(t) = -|\sin(t)|$. Donc si $t \in [n\pi, (n+1)\pi], (-1)^n \sin(t) = |\sin(t)|$. D'où le résultat.

4. Montrons que (w_n) est une suite décroissante.

$w_{n+1} - w_n = 2\big[f(u_{n+1}) - f(u_n)\big]$ où $n\pi \leqslant u_n \leqslant (n+1)\pi \leqslant u_{n+1} \leqslant (n+2)\pi$.

Comme f décroît sur $\mathbb{R}_+^\star$, on a $w_{n+1} - w_n \leqslant 0 \qquad (\star)$.

4.a. $\displaystyle\int_0^{2n\pi} \sin(t) f(t) dt = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k w_k = S_{2n-1}$.

$S_{2n+1} - S_{2n-1} = w_{2n} - w_{2n+1} \geqslant 0$ d'après $(\star)$. Donc (S_{2n-1}) est croissante.

4.b. $\displaystyle\int_0^{2n+1\pi} \sin(t) f(t) dt = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k w_k = S_{2n}$.

$S_{2n+2} - S_{2n} = w_{2n+2} - w_{2n+1} \leqslant 0$ d'après $(\star)$. Donc (S_{2n}) est décroissante.

4.c. $S_{2n} - S_{2n-1} = w_{2n} \geqslant 0$. Les deux suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont donc adjacentes. Elles convergent et ont même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

5. Si $0 < x < y$, soit $n = E\left[\dfrac{y}{\pi}\right] \cdot$ Alors $n\pi \leqslant y < (n+1)\pi$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$I(x,y) = I(x, n\pi) + I(n\pi, y) = -I(x,0) + I(0, n\pi) + I(n\pi, y)$.

$I(0, n\pi) = \displaystyle\int_0^{n\pi} \sin(t) f(t) dt = S_n$. Comme les deux suites extraites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) convergent, la suite (S_n) converge vers ℓ.

Lorsque $y \to +\infty$, on a $n \to \infty$. D'où $I(0, n\pi) \to \ell$.

Comme $|I(n\pi, y)| \leqslant \displaystyle\int_{n\pi}^{y} \sin(t) dt \leqslant w_n$ car $f \geqslant 0$ et $n\pi \leqslant y \leqslant (n+1)\pi$, et comme, d'après 3.a. $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par encadrement, on a $I(n\pi, y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$.

Finalement $I(x,y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \ell - I(0,x) \in \mathbb{R}$.

6. Ici $f(t) = \dfrac{1}{t} \cdot$ Les hypothèses a,b,c,d sont véridiées. D'après 5. on a $I_x \in \mathbb{R}$.

Partie V

1. $h_x : t \mapsto \dfrac{1}{x+t} \cdot$ Les hypothèses a,b,c,d sont véridiées. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut conclure, d'après IV.6. que $H(x)$ existe.

2. Le changement de variable affine $t + x = u$ donne le résultat.

3. $\sin(t-x) = \sin(t)\cos(x) - \sin(x)\cos(t)$.