Chapitre 1
Oscillateur harmonique

Pour Pierre Simon de **Laplace**, la nature est le fondement de la découverte scientifique, les mathématiques n'en étant qu'un instrument. Philosophiquement, il est l'un des initiateurs du déterminisme selon lequel tout est réglé par les lois de la nature. Dans son *Essai philosophique sur les probabilités* publié en 1814, il explique : *Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger des atomes ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.* Laplace avait aussi compris que cet esprit idéal ne pouvait exister ; c'est pourquoi il s'attacha tant à développer le calcul des probabilités.

Pierre Simon de Laplace
1749-1827

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ L'équation différentielle canonique d'un oscillateur harmonique
- ▷ La définition et la caractérisation pratique d'une position d'équilibre
- ▷ Les expressions de l'énergie potentielle élastique, de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique
- ▷ Résoudre l'équation différentielle à partir de conditions initiales données
- ▷ Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence et de pulsation
- ▷ Contrôler la cohérence de la solution obtenue avec la conservation de l'énergie mécanique

Résumé de cours

Équation différentielle modèle de l'oscillateur harmonique

Définition

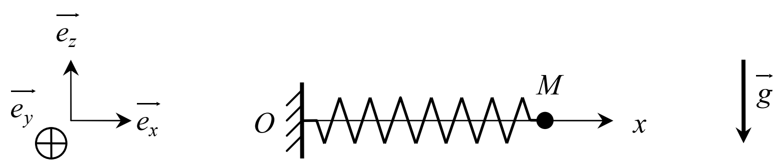
On appelle **oscillateur harmonique** à un degré de liberté tout système dont l'évolution au cours du temps est décrite par une grandeur $u(t)$ solution de l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2\, u = 0}$$

avec ω_0 une constante appelée **pulsation propre** de l'oscillateur.

Exemple du mobile accroché à un ressort horizontal

Considérons un objet mobile M de masse m, fixé à un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 et de masse négligeable. On suppose que cet objet peut glisser sur un support horizontal, sans frottements (ni du support, ni de l'air). On repère sa position par l'abscisse x.



– La **position d'équilibre** est une position $x_{\text{éq}}$ où M peut rester immobile : alors $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$ (caractérisation cinématique).

Pour déterminer $x_{\text{éq}}$, on applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) à M à l'équilibre, dans le référentiel terrestre $\mathfrak{R}$ supposé galiléen, soit $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

(Nous reviendrons plus en détails sur ces notions au chapitre 11.)

– Si on étire ou comprime initialement le ressort, ou bien si on donne à la masse une vitesse initiale, et qu'on laisse alors le système évoluer, on constate que la masse oscille périodiquement autour d'une position donnée.

Ces oscillations obéissent à l'équation différentielle : $\ddot{x} + \dfrac{k}{m} x = \dfrac{k}{m} x_{\text{éq}}$

que l'on obtient en appliquant le PFD à M en mouvement, soit $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}}$.

Cette équation différentielle linéaire relie x et ses dérivées temporelles en ne faisant intervenir que des constantes du problème (k, m, ℓ_0) : c'est l'**équation du mouvement**. Elle peut encore s'écrire $\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2\, u = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ et $\boxed{u = x - x_{\text{éq}}}$ (écart à la position d'équilibre).

⇨ **Méthode 1.1. Établir l'équation du mouvement d'une masse accrochée à un ressort**

Nous verrons au chapitre 12 que cette équation différentielle décrit plus généralement toutes les situations où un point matériel se trouve au voisinage d'une position d'équilibre stable.

■ Équation horaire de l'oscillateur harmonique

❑ Solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique

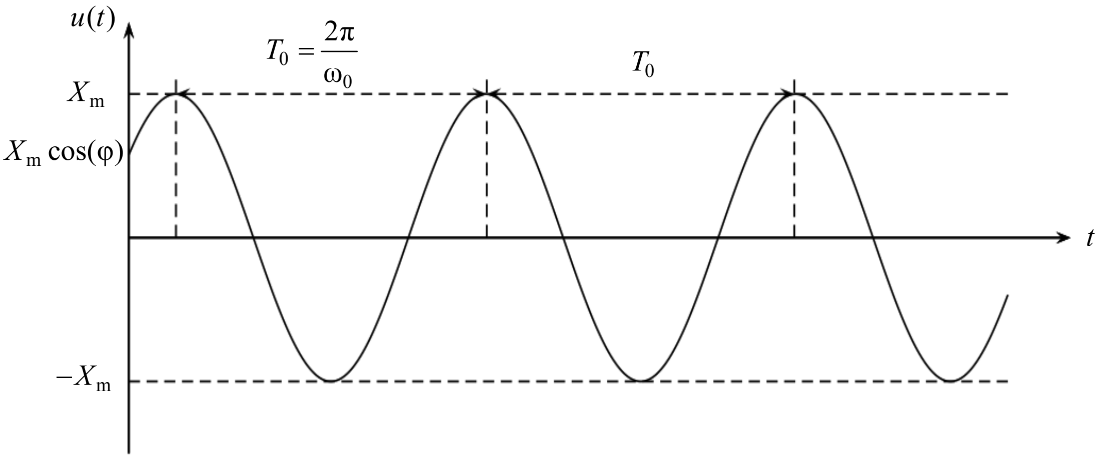
Les solutions de l'équation différentielle peuvent s'écrire sous l'une des deux formes équivalentes :

$$\boxed{u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{u(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi)} \text{ (avec } X_\mathrm{m} > 0\text{).}$$

Les deux **constantes d'intégration** (A et B ou bien X_m et φ) s'obtiennent à l'aide des **conditions initiales**.

⇨ **Méthode 1.2. Résoudre l'équation différentielle du mouvement**
⇨ **Méthode 1.3. Passer d'une expression des solutions à une autre**

La représentation graphique de la fonction $u(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est donnée ci-dessous :



❑ Grandeurs caractéristiques des oscillations

$X_\mathrm{m} (> 0)$ est l'**amplitude** des oscillations ; elle correspond à la valeur maximale de $u(t)$.

$(\omega_0 t + \varphi)$ est la **phase** à un instant t, et φ est la **phase à l'origine**, qui n'a pas d'interprétation physique autre que d'imposer la valeur de $u(t)$ à l'instant initial : $u(0) = X_\mathrm{m}\cos(\varphi)$.

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ est la **période propre** des oscillations ; elle correspond à la plus petite durée au bout de laquelle la fonction $u(t)$ se répète identiquement à elle-même. Comme la pulsation propre ω_0 et la **fréquence propre** $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$, la période propre T_0 est indépendante des conditions initiales : on parle d'**isochronisme** des oscillations.

ω_0 et f_0 ont la dimension de l'inverse d'un temps ; ω_0 s'exprime en rad/s, f_0 en hertz (Hz).

Remarque

L'indice 0 utilisé pour la pulsation propre, la période propre et la fréquence propre ne fait pas référence à un état initial. Il signale simplement que ces grandeurs sont caractéristiques de l'évolution libre de l'oscillateur harmonique (sans amortissement ni excitation extérieure).

■ Conservation de l'énergie mécanique

❑ Notion générale d'énergie

La grandeur **énergie** a été introduite en physique avec l'idée que, quels que soient les phénomènes, on peut toujours trouver une certaine quantité totale qui se conserve : chaque phénomène nouveau conduit à ajouter un terme d'énergie supplémentaire, de manière à obtenir une somme constante.
Cette démarche générale sera mise en forme plus précisément au chapitre 17.

❑ Conservation de l'énergie mécanique pour un oscillateur harmonique

– L'**énergie cinétique** E_c d'un point matériel de masse m se déplaçant à une vitesse v est définie par $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$.

Elle se conserve pour un point se déplaçant à vitesse constante, ou bien à l'équilibre (où elle est nulle). Mais dans le cas étudié précédemment, elle ne se conserve pas.

– En revanche, si on lui ajoute le terme $\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2}$, appelé **énergie potentielle élastique**, on constate que la somme $\boxed{E_m = E_c + E_{pe}}$, appelée **énergie mécanique**, se conserve.

⇨ **Méthode 1.4. Établir la conservation de l'énergie mécanique**

– Dans des problèmes où l'altitude z du point M varie, il sera nécessaire d'ajouter dans l'énergie potentielle un autre terme, l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = \pm mgz\,(+\text{cte})$, pour obtenir une énergie mécanique $E_m = E_c + E_{p\,\text{totale}}$ constante.
D'autres cas d'énergies potentielles seront vus à partir du chapitre 12.

Méthodes

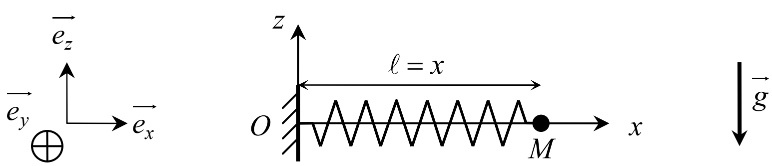
Comment obtenir l'équation différentielle de l'oscillateur ?

Méthode 1.1. Établir l'équation du mouvement d'une masse accrochée à un ressort

L'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur horizontal peut s'obtenir par projection du principe fondamental de la dynamique sur le vecteur unitaire caractérisant la direction du mouvement. On doit préalablement faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la masse, et écrire leurs composantes précisément en fonction des notations de l'énoncé.

⇨ **Exercices 1.5, 1.6, 1.7**

Considérons un objet mobile M de masse m, fixé à un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 et de masse négligeable. On suppose que cet objet peut glisser sur un support horizontal, sans frottements (ni du support, ni de l'air). On repère sa position par l'abscisse x dans un repère ($Oxyz$), lié au référentiel terrestre supposé galiléen.



Établissons l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x repérant la masse m (qui peut être indifféremment l'abscisse de son centre, de l'un de ses bords, ou son abscisse tout court si elle peut être elle-même assimilée à un point).

– Les forces appliquées sur M sont : la force de rappel élastique $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_x}$ soit ici $\vec{T} = -k(x - \ell_0)\overrightarrow{e_x}$; le poids $\vec{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$; la réaction du support, qui en l'absence de frottement est normale (c'est-à-dire orthogonale au support, qui est l'axe (Ox)), soit $\vec{R} = R_y\overrightarrow{e_y} + R_z\overrightarrow{e_z}$.

– La position de M étant repérée par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x}$, il a pour vecteur vitesse $\vec{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x}$ et pour vecteur accélération $\vec{a} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x}$.

– Le principe fondamental de la dynamique (PFD), dans le référentiel terrestre supposé galiléen, s'écrit $m\vec{a}(M) = \vec{T} + \vec{P} + \vec{R}$.

En projection sur $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$, on obtient : $\begin{cases} m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) & (1) \\ 0 = R_y & (2) \\ 0 = R_z - mg & (3) \end{cases}$

Les équations (2) et (3), équivalentes à $\vec{R} = +mg\vec{e_z}$, indiquent que dans ce cas, la réaction du support compense exactement le poids, empêchant ainsi l'objet de tomber.

✎ *Cette dernière constatation n'est pas du tout une propriété générale ! Elle concerne seulement un objet glissant sans frottements sur un support horizontal immobile, en l'absence d'autre force verticale, dans un référentiel galiléen… ce qui fait beaucoup de conditions !*

L'équation (1) peut se réécrire $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0}$. Cette équation différentielle linéaire à coefficients constants relie x et ses dérivées temporelles en ne faisant intervenir que des constantes du problème : c'est l'équation du mouvement.

– À l'équilibre, on a $x = x_{\text{éq}}$ et $\ddot{x} = 0$. L'équation (1) conduit ainsi à $\boxed{x_{\text{éq}} = \ell_0}$. En posant $u = x - x_{\text{éq}}$, l'équation du mouvement se réécrit $\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

■ Comment obtenir l'équation horaire de l'oscillateur ?

❑ Méthode 1.2. Résoudre l'équation différentielle du mouvement

L'équation horaire d'un oscillateur libre s'obtient en résolvant l'équation différentielle du mouvement. Pour cela, on choisit l'une des deux formes générales des solutions, puis on détermine les deux constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales.

⇨ **Exercices 1.5, 1.6**

Considérons que l'oscillateur étudié dans la méthode 1.1 est initialement étiré d'une longueur a (> 0) par rapport à sa position d'équilibre (c'est-à-dire que M est à une abscisse $x = x_{\text{éq}} + a$), et lâché sans vitesse initiale. Pour obtenir l'équation horaire, il faut donc résoudre l'équation $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$ avec les conditions initiales $u(0) = a$ et $\dot{u}(0) = 0$.

– En choisissant les solutions sous la forme $u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, on obtient en dérivant $\dot{u}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$. Les conditions initiales donnent donc : $u(0) = A$ et $\dot{u}(0) = B\omega_0$. Par identification, on en déduit $A = a$ et $B = 0$ d'où $\boxed{u(t) = a\cos(\omega_0 t)}$ soit $\boxed{x(t) = \ell_0 + a\cos(\omega_0 t)}$.

– Si on choisit la seconde forme $u(t) = X_{\text{m}}\cos(\omega_0 t + \varphi)$, alors $\dot{u}(t) = -\omega_0 X_{\text{m}}\sin(\omega_0 t + \varphi)$. Les conditions initiales donnent donc : $u(0) = X_{\text{m}}\cos\varphi$ et $\dot{u}(0) = -\omega_0 X_{\text{m}}\sin\varphi$. Par identification : $\sin\varphi = 0$, donc on peut prendre *a priori* $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pm\pi$. Mais le deuxième choix, donnant $\cos\varphi = -1$, conduirait à $X_{\text{m}} = -a < 0$. On prend donc $\varphi = 0$ et $X_{\text{m}} = a$, d'où $\boxed{u(t) = a\cos(\omega_0 t)}$ qui est bien la solution trouvée avec l'autre méthode.

❑ Méthode 1.3. Passer d'une expression des solutions à une autre

Pour passer de l'expression $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ des solutions de l'oscillateur à l'expression $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, et réciproquement, on utilise :

$$\begin{cases} A = X_m \cos\varphi \\ B = -X_m \sin\varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X_m = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \tan\varphi = -\dfrac{B}{A} \text{ avec } \cos\varphi \text{ de même signe que } A. \end{cases}$$

⇨ **Exercice 1.4**

– En utilisant la relation trigonométrique $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, on peut développer $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ en $x(t) = X_m \cos\varphi \cos(\omega_0 t) - X_m \sin\varphi \sin(\omega_0 t)$. Par identification, on aboutit à $A = X_m \cos\varphi$ et $B = -X_m \sin\varphi$.

– Inversement, si on élève ces deux formules au carré et qu'on additionne, sachant que $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, on trouve $X_m^2 = A^2 + B^2$, donc $X_m = \sqrt{A^2 + B^2}$ puisqu'on peut toujours choisir X_m positive.

Et le rapport des deux formules précédentes donne $\tan\varphi = -\dfrac{B}{A}$. Dans un intervalle de largeur 2π, il y a deux angles ayant cette même tangente. On doit prendre celui tel que $\cos\varphi$ ait le même signe que *A*, puisque $A = X_m \cos\varphi$ avec $X_m > 0$.

■ Comment faire apparaître la conservation de l'énergie ?

❑ Méthode 1.4. Établir la conservation de l'énergie mécanique

Pour vérifier la conservation de l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique, on utilise les solutions de l'équation du mouvement pour expliciter l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p. On en déduit l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ et on vérifie qu'elle est bien indépendante du temps.

⇨ **Exercices 1.5, 1.6**

Avec l'oscillateur horizontal de la méthode 1.1 dont les solutions ont été établies dans la méthode 1.2, on commence par calculer l'énergie cinétique $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$ en fonction du temps, soit $\boxed{E_c = \dfrac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}$. D'autre part on calcule l'énergie potentielle élastique du point *M* : $E_p = \dfrac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \dfrac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$ d'où $\boxed{E_p = \dfrac{1}{2}k\,a^2 \cos^2(\omega_0 t)}$.