Raisonnement 1

Compétences

▷ Comprendre des énoncés avec des quantificateurs.

Exercices 1, 2, 3 et 4.

▷ Savoir utiliser l'implication, l'implication réciproque, l'équivalence.

Exercice 5.

▷ Savoir écrire la négation d'un énoncé, afin, par exemple, de rédiger des raisonnements par l'absurde.

Exercices 8 et 9.

▷ Savoir rédiger un raisonnement par récurrence. On rappelle que le raisonnement s'articule en quatre parties :

1. L'introduction où on énonce clairement l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$;
2. L'initialisation où on vérifie l'hypothèse de récurrence au premier rang ;
3. L'hérédité où l'on prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est ;
4. La conclusion où on énonce clairement que la propriété est démontrée.

Exercices 11, 12 et 13.

▷ Savoir rédiger un raisonnent par analyse-synthèse. On applique ce type de raisonnement lorsqu'on souhaite prouver qu'il existe un élément x, en général unique, tel que l'énoncé $\mathcal{P}(x)$ soit vrai. Elle se décompose en deux parties :

- ⋆ **l'analyse**, où l'on identifie les candidats possibles : on suppose que de tels éléments x existent, puis on essaye de trouver des conditions nécéssaires à l'existence de tels éléments ;
- ⋆ **la synthèse**, où l'on vérifie si le ou les candidats trouvés sont bien solutions. Autrement dit, on regarde les conditions suffisantes.

Exercices 6 et 7.

▷ Savoir utiliser la disjonction des cas, c'est-à-dire lister les différents sous cas et les traiter séparement.

Exercices 14 et 15.

Coup d'œil sur le chapitre

Dans ce chapitre, on aborde la compréhension d'énoncés mathématiques, la traduction d'un énoncé en français en énoncé mathématique.
Les énoncés mathématiques permettent d'exprimer de façon concise des propriétés grâce à l'utilisation de quantificateurs dont l'usage est l'une des principales difficultés. En particulier il faut être très attentif à l'ordre dans lequel ceux-ci sont introduits. Par exemple, les deux énoncés

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{C},\ \ x^2 = z \quad \text{et} \quad \exists x \in \mathbb{C},\ \forall z \in \mathbb{C},\ \ z = x^2$$

n'ont pas le même sens. Le premier est vrai, le second faux.
Ce chapitre aborde ensuite les modes de raisonnements : le raisonnement par récurrence, le raisonnement par analyse-synthèse, le raisonnement par l'absurde et par disjonction de cas.

Le saviez-vous ?

Les paradoxes en logique sont apparus dès l'Antiquité. Déjà le philosophe grec Épiménide mettait en exergue la contradiction de la phrase « Un Crétois dit que les Crétois sont menteurs ». Ce n'est cependant que vers 1900 que ces paradoxes ont ébranlé la toute récente théorie des ensembles.

Le logicien Bertrand Russell (1872-1970) mit au jour un paradoxe qu'il a popularisé de manière imagée par ceci : dans un village le barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là. Le barbier se rase-t-il lui-même ? Qu'on réponde oui ou qu'on réponde non, on aboutit à une contradiction. Ces paradoxes sont obtenus par autoréférence, c'est-à-dire que la définition concerne l'objet lui-même.

Pour éviter ces paradoxes, on dut alors créer une théorie basée sur des axiomes permettant de construire un ensemble ; il est alors obtenu en partant d'ensembles élémentaires, comme les entiers, ou déjà construits, à l'aide d'opérations dûment répertoriées parmi lesquels : la réunion, l'ensemble des parties, etc. On n'a en particulier pas le droit de parler de l'ensemble de tous les ensembles.

Les énoncés

Quantificateurs et négation

Exercice 1. Écrire, à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$, les énoncés suivants.

$\mathcal{P}$: Pour tout nombre réel, il existe un entier qui lui est supérieur.
$\mathcal{Q}$: Entre deux nombres réels distincts, il y a toujours un nombre irrationnel.
$\mathcal{R}$: Pour tout réel strictement positif, il existe un entier naturel tel que le produit de ces deux nombres soit plus grand que 1 *(axiome d'Archimède).*
$\mathcal{S}$: Il n'existe pas d'entier plus grand que tous les autres.

Exercice 2. Traduire en français courant les énoncés, puis les simplifier.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \ x \leqslant \alpha$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad ax \leqslant 0$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant a$.
4. $\exists\, a \in \mathbb{R}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a$.
5. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, a \in \mathbb{R}_+, \quad u_n = a$.
6. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}_+,\ |u_n - 1| \leqslant a$.

Exercice 3. *Négation d'énoncé*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Écrire, à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$, les énoncés suivants puis leur négation.

1. f admet un maximum en $a \in \mathbb{R}$;
2. f admet un maximum ;
3. f est constante ;
4. f est 2-périodique ;
5. f est périodique ;
6. f est paire ;
7. f est positive ;
8. f est la fonction nulle ;
9. f est croissante.

Exercice 4. Soient f_1, f_2 et f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Traduire par des graphiques les énoncés suivants :

1. $\exists\, a \in \mathbb{R}, \forall\, i \in \{1{,}2{,}3\},\ f_i(a) = 1$;
2. $\forall\, i \in \{1{,}2{,}3\}, \exists\, a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$;
3. $\exists\, i \in \{1{,}2{,}3\}, \forall\, a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, i \in \{1{,}2{,}3\},\ f_i(a) = 1$.

Rédaction des raisonnements classiques

Exercice 5. Soient $x,\theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
Placer entre les énoncés les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\iff$.

1. $x = 2 \quad \dots \quad x^2 = 4$	4. $x(x+2) = x(2x+3) \quad \dots \quad x = -1$
2. $\theta = 2\pi \quad \dots \quad e^{\mathrm{i}\theta} = 1$	5. $x^2 \geqslant 9 \quad \dots \quad x \geqslant 3$
3. $e^x = 1 \quad \dots \quad x = 0$	6. $\ln(x^2) = 3 \quad \dots \quad \ln(x) = 3/2$.

Exercice 6. ($\star$) *Raisonnement par analyse-synthèse*
On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}, \qquad f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

1. On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie cette propriété.
   (a) Prouver que $f(0) = 1$.
   (b) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x-1) = 2 - x$.
   (c) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.
2. Conclure.

Exercice 7. ($\star\star$) *Raisonnement par analyse-synthèse*
Prouver que toute fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose, de manière unique, comme somme d'une fonction constante et d'une fonction s'annulant en 1.

Exercice 8. ($\star$) *Raisonnement par l'absurde*
1. (a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad x(1-x) \leqslant 1/4$.
   (b) Soient a,b et c trois réels dans $[0,1]$. Prouver que l'un des nombres suivants est inférieur à $1/4$.

$$a(1-b), \qquad b(1-c) \quad \text{et} \quad c(1-a).$$

2. Soient a, b et c trois réels strictement positifs.
   En adaptant le raisonnement précédent, justifier que, parmi les trois nombres $a + \frac{1}{b}$, $b + \frac{1}{c}$ et $c + \frac{1}{a}$, il existe un nombre supérieur à 2.

Exercice 9. ($\star$) *Principe des tiroirs et raisonnement par l'absurde*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et deux réels $a < b$.
On considère, de plus, $n+1$ réels de $[a,b]$, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. On souhaite démontrer par l'absurde l'énoncé

$\mathcal{P}$: « Il existe deux de ces nombres dont la distance est inférieure à $\dfrac{b-a}{n}$. »

1. (a) Écrire à l'aide des quantificateurs l'énoncé $\mathcal{P}$.

(b) En déduire sa négation.

2. Prouver l'énoncé $\mathcal{P}$.
3. $(\star\star\star)$ *Application*
   On considère 13 réels, $a_0, \ldots, a_{12}$. Justifier que l'on peut trouver deux de ces nombres tels que

$$0 \leqslant \sin(a_i - a_j) \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad i \neq j.$$

Exercice 10. *Raisonnement par l'absurde et limite*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, ${u_{n+2}}^2 = u_{n+1} + u_n - 2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. $(\star\star)$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, ${u_n}^2 = {u_n}^n + 3u_n - 2$. On suppose que la suite converge. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Exercice 11. *Raisonnement par récurrence*

1. Prouver que pour tout entier naturel n, tout réel x positif

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

2. Que dire d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \ ?$$

Exercice 12. $(\star\star)$ *Raisonnement par récurrence*

Justifier que pour tout réel u et tout entier naturel n : $\quad |\sin(nu)| \leqslant n|\sin(u)|$.

Exercice 13. $(\star\star)$ *Raisonnement par récurrence*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.

Exercice 14. *Disjonction des cas*

Le maximum de deux nombres x,y est noté $\max(x,y)$. De même, on note $\min(x,y)$ le plus petit des deux nombres x et y. Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Exercice 15. $(\star)$ *Disjonction des cas*

Résoudre l'équation $|x-3| + |x-1| = (x-2)^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

À votre tour

Dans les exercices suivants, on indiquera précisément le type de raisonnement choisi.

Exercice 16. Montrer que pour tout entier naturel n, $n^3 - 3n$ est pair.

Exercice 17. ($\star\star$) Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$ tels que $ad - bc \neq 0$.
Justifier que $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ est irrationnel.

Exercice 18. ($\star$) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 = 1/4, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \sqrt{v_n - {v_n}^2}.$$

Justifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Exercice 19. ($\star\star$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 \text{ est un entier naturel pair,} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3{u_n}^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier naturel pair.

Exercice 20. ($\star\star$) Soit c un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = c \text{ et pour } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

Calculer u_1 et u_2. Quelle conjecture simple en déduit-on sur la valeur de u_n ? Prouvez-la.

Exercice 21. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$.

1. Donner des exemples de réels a qui vérifient cette propriété.
2. Prouver que pour tout entier naturel n,
$$\left(a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) = \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) + \left(a^{n+2} + \frac{1}{a^{n+2}}\right).$$
3. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a^n + \dfrac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.
4. Est-ce encore vrai pour $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 22. ($\star\star$) Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}, \qquad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 23. ($\star\star\star$) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que pour tout réel x positif,

$$1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \exp(x).$$

2. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \exp(x) = +\infty$.

Un petit coup de pouce

Ex. 3. Pour rappel, si $\mathcal{P}(x)$ est un énoncé relatif à un élément $x \in \mathrm{E}$, la négation de $(\,\forall x \in \mathrm{E},\, \mathcal{P}(x)\,)$ est $(\,\exists x \in \mathrm{E},\, \textsc{Non}\,\mathcal{P}(x)\,)$, alors que la négation de $(\,\exists x \in \mathrm{E},\, \mathcal{P}(x)\,)$ est $(\,\forall x \in \mathrm{E},\, \textsc{Non}\,\mathcal{P}(x)\,)$.

Ex. 6. 1. (a) Tester la relation avec $x = f(0)$ et $y = 0$.
2. On effectue la synthèse. Vérifier que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - x$ est solution.

Ex. 8. 1. (a) Vérifier que $x(1-x) = 1/4 - (x - 1/2)^2$.
(b) On pourra considérer le produit de ces trois nombres.

Ex. 10. 2. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) et $\ell \neq 1$. Que peut-on dire de la limite de ${u_n}^n$? (trois cas $|\ell| > 1$, $|\ell| < 1$ et $\ell = -1$).

Ex. 11. Donnons dans chacun des cas la propriété de récurrence :
$\mathcal{P}_1(n) : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ où x est fixé, $\quad \mathcal{P}_2(n) :\; u_n = 0$ et $u_{n+1} = 0$.

Ex. 12. Donnons la propriété de récurrence. Pour u fixé, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : \qquad |\sin(nu)| \leqslant n|\sin(u)|.$$

Pour l'hérédité, penser à $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et à l'inégalité triangulaire.

Ex. 16. Par disjonction de cas.

Ex. 17. On pourra raisonner par l'absurde en supposant $\frac{ax+b}{cx+d}$ rationnel.

Ex. 18. La propriété à montrer par récurrence ne peut être simplement $v_n \geqslant 0$: ça ne marche pas. Il faut une propriété plus restrictive.

Ex. 20. On remarque que la valeur de u_{n+1} dépend de toutes les valeurs précédentes ; il faut prendre cela en compte dans le choix de l'hypothèse de récurrence.

Ex. 23. On pourra procéder par récurrence. Pour justifier l'hérédité, étudier la fonction $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et vérifier que $f'_{n+1} = f_n$.

Solutions

Exercice 1.

Commentaire. *Voici un exercice de traduction du français courant en l'écriture symbolique mathématique. On pourra noter que les formules mathématiques ont l'avantage d'être condensées.*

$\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad x \leqslant n.$ $\qquad \mathcal{Q} : \forall x,y \in \mathbb{R}, x < y \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Q}, x \leqslant \alpha \leqslant y.$
$\mathcal{R} : \forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad xn \geqslant 1.$
$\mathcal{S}$: NON $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, \ m \leqslant x$, ou aussi : $\mathcal{S} : \forall x \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, x < m.$

Exercice 2.

Commentaire. *À l'inverse de l'exercice précédent, on passe de l'écriture symbolique mathématique à du français courant.*

1. x est positif et inférieur à n'importe quel réel strictement positif. En raisonnant par l'absurde, on constate que x ne peut être que nul.
2. En considérant successivement $x = 1$ et $x = -1$, on a $a \leqslant 0$ et $-a \leqslant 0$. a est à la fois positif et négatif. a est nul.
3. En considérant $x = 0$, on constate que a est négatif. Réciproquement, comme tout carré de réel est positif, l'énoncé 3 traduit le fait que a est négatif.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs (dans ce cas, a dépend de n).
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1 (pour tout entier n, $u_n = 1$).

Exercice 3.

Commentaire. *Un nouvel exercice de traduction dans le cas (fréquent) des fonctions. À partir de l'écriture mathématique, on déduit facilement la négation.*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant f(a)$;
2. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant f(a)$;
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = f(y)$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+2) = f(x)$;
5. $\exists \mathrm{T} \in \mathbb{R}^*$,
   $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+\mathrm{T}) = f(x)$;
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$;
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0$;
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$;
9. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $(\, x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)\,)$.

La négation de chacun des énoncés est :
1. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > f(a)$;
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > f(a)$;
3. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) \neq f(y)$;
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x+2) \neq f(x)$;
5. $\forall \mathrm{T} \in \mathbb{R}^*$,
   $\exists x \in \mathbb{R}, f(x+\mathrm{T}) \neq f(x)$;
6. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) \neq f(x)$;
7. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) < 0$;
8. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0$;
9. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $(\, x \leqslant y \text{ ET } f(x) > f(y)\,)$.