Exercice 1

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 2} \frac{2x^n}{n^2-1}\cdot$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2. On note S la fonction somme de la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{2x^n}{n^2-1}\cdot$ Déterminer S sur $]-R, R[$.

3. Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E)\quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Problème

AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout f dans E, on appelle transformée de LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt.$$

1. Question préliminaire
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

On considère les propositions suivantes :

(i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;

(ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

1.a) f est positive sur $[a, +\infty[$;

1.b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

PARTIE I : Exemples et propriétés

2.a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

2.b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

1.c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

3.a) On considère la fonction $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $U(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(U)$.

3.b) Soit $\lambda \geqslant 0$. On considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par : $h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$. Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x > 0$, justifier de l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leqslant e^{\frac{-xt}{2}}$ pour tout $t \geqslant A$. En déduire que g_n est un élément de E.

5. Transformée de Laplace d'une dérivée
Soit f dans E de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

6. Régularité d'une transformée de Laplace

6.a) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question 4.

6.b) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

PARTIE II : Comportements asymptotiques de la transformée de LAPLACE

Dans toute cette partie, f est un élément de E.

7. On suppose dans cette question que f est dans F.

7.a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

7.b) *Théorème de la valeur initiale*

On suppose, de plus, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8. Théorème de la valeur finale

On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

8.a) Démontrer que f appartient à F.

8.b) Soit n un entier naturel.

Démontrer que $a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)dx$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h_n(x)e^{-x}f\left(\dfrac{x}{a_n}\right)$.

8.c) En déduire, à l'aide du théoréme de convergence dominée, que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\mathcal{L}(f)a_n = \ell$.

8.d) Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

9.a) Démontrer que R est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et déterminer R'. En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a :

$$\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x).$$

9.b) On fixe $\varepsilon > 0$. Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait $|R(t)| \leqslant \varepsilon$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\big|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)\big| \leqslant x\int_0^A |R(t)|dt + \varepsilon.$$

9.c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

PARTIE III : Application

10. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour $t > 0$ réel.

10.a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par
$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

10.b) En considérant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

10.c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$ on a :

$$\int_0^X \sin(t)e^{-xt}dt = \frac{-1}{x^2+1}\Big(-1 + e^{-xX}\big(\cos(X) + x\sin(X)\big)\Big).$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-xt}\sin(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)dt$.

10.d) Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ.

Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question 9) :

Lorsque f dans E vérifie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = \ell$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0}\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

On notera que, par rapport à la question 9, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par l'hypothèse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = \ell$

Solution

EXERCICE 1

1. Notons $a_n = \dfrac{2}{n^2-1}$ pour $n \geqslant 2$.
Si $x \neq 0$, $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\dfrac{n^2-1}{(n+1)^2-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|$.
D'après le théorème de d'Alembert pour les séries à termes positifs, $\sum |a_n x^n|$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. On déduit de la définition du rayon de convergence que $R = 1$.

2. $\forall x \in]-1,1[, S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\Big)x^n$.

D'après le cours, $\forall x \in]-1,1[, -\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cdot$

Donc $\forall x \in]-1,1[, -x\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}\cdot$

D'où $\forall x \in]-1,1[, S(x) = -x\ln(1-x) - \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\cdot$

$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\Big(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\Big)\cdot$

Donc $\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, S(x) = \dfrac{(1-x^2)}{x}\ln(1-x) + 1 + \dfrac{x}{2}\cdot$
On a $S(0) = 0$ avec la définition de S donnée par l'énoncé.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{3}{2}\cdot$

EXERCICE 2

1. (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients fonctions continues sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On la résout comme dans le cours.
$(E) \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \dfrac{d}{dx}\big(x^{-3/2}y(x)\big) = \dfrac{1}{2x^2} \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, y(x) = \lambda x^{3/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$
où λ est une constante réelle arbitraire.
2. Si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) = \lambda x^{3/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\dfrac{f(x)}{x} = \lambda\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = -\infty$, la fonction f n'est pas dérivable en 0. L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ est donc l'ensemble vide.

PROBLÈME

1.a) (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)
1.b) (i) $\Rightarrow$ (ii). Notons que (ii) $\Rightarrow$ (i) est possible si $f \leqslant 0$.

Partie I

2.a) E est non vide car il contient $\omega : x \mapsto 0$.
Si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ car ce dernier est un espace vectoriel, et comme $(\lambda f + g)(t)e^{-xt} = \lambda f(t)e^{-xt} + g(t)e^{-xt}$ et comme les deux fonctions $t \mapsto f(t)e^{-xt}$, $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto (\lambda f + g)(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On conclut que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2.b) E est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On a $F \neq \emptyset$ car $\omega \in F$.
Si $f \in F, f(t)e^{-xt} = O(e^{-xt}) \underset{t \to +\infty}{=} o(t^{-2})$ par croissances comparées car $x > 0$.
Donc $F \subset E$. Comme l'ensemble des fonctions continues et bornées est un espace vectoriel, d'après le cours, on peut conclure que F est un sous-espace vectoriel de E.
2.c) Si $f \in E$, pour tout $x > 0, \mathcal{L}(f)(x) \in \mathbb{R}$. Donc $\mathcal{L}(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$.
L'intégration étant linéaire, $\mathcal{L}$ est est linéaire.
3.a) $U \in F \subset E$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \mathcal{L}(U)(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$
3.b) $h_\lambda \in F \subset E$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, 0 < h_\lambda(x) \leqslant 1$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+, \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+x)t}dt = \frac{1}{x+\lambda}\cdot$
4. $t^n e^{-xt} = \left(t^n e^{\frac{-xt}{2}}\right)e^{\frac{-xt}{2}}$. Par croissances comparées, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}, \displaystyle\lim_{t \to +\infty} \left(t^n e^{\frac{-xt}{2}}\right) = 0$. Donc : $\exists A > 0, \forall t \geqslant A, 0 \leqslant t^n e^{\frac{-xt}{2}} \leqslant 1$.
Par suite, $\forall t \geqslant A, 0 \leqslant t^n e^{-tx} = g_n(t) \leqslant e^{\frac{-xt}{2}}$.
La fonction $t \mapsto e^{\frac{-xt}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $t \mapsto t^{-2}$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Il s'ensuit que g_n qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ y est intégrable. D'où $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in E$.
5. Les fonctions f et $t \mapsto e^{-tx}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, par intégration par parties, $\forall y \in \mathbb{R}_+^\star, \displaystyle\int_0^y f'(t)e^{-tx}dt = \Big[f(t)e^{-tx}\Big]_{t=0}^{t=y} - x\int_0^y f(t)e^{-tx}dt$.
Comme $f \in E, \displaystyle\int_0^y f(t)e^{-tx}dt \xrightarrow[y \to +\infty]{} \mathcal{L}(f)(x)$.
Comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+, f(y)e^{-xy} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$.
Donc $\displaystyle\int_0^y f'(t)e^{-tx}dt \xrightarrow[y \to +\infty]{} x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

Comme f est croissante, on a $f' \geqslant 0$ et, d'après 1.a), f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Donc $f' \in E$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

6.a) Notons $F(x,t) = f(t)e^{-xt}$.

- Pour tout $x > 0$, $t \mapsto F(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto F(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -g_1(t)e^{-tx}$.

- La fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+$.
- Soit $a > 0$. $\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |g_1(t)|e^{-at} = \varphi(t)$.

Comme $g_1 \in E$, la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales paramétrées, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \mathcal{L}(f)'(x) = -\mathcal{L}(g_1)(x)$.

6.b) Montrons par récurrence que $\mathcal{L}(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \mathcal{L}(f)^n = (-1)^n \mathcal{L}(g_n).$$

C'est déjà prouvé pour $n = 1$ en 6.a. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
Supposons que $\mathcal{L}(f) \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(f)^n = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$.
Comme $g_n \in E$, d'après 6.a), $\mathcal{L}(g_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathcal{L}(g_n)' = -\mathcal{L}(h_n)$ où $h_n(t) = tg_n(t) = g_{n+1}(t)$.
Donc $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathcal{L}(f)^{n+1} = (-1)^{n+1}\mathcal{L}(g_{n+1})$.
Le résultat est prouvé par récurrence.

Partie II

7.a) Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de $[1, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n) = +\infty$.
$\psi_n : t \mapsto f(t)e^{-x_n t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. La suite de fonctions $(\psi_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\psi : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.
$\forall t \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |\psi_n(t)| \leqslant |f(t)|e^{-t}$.
Comme $f \in E$, la fonction $t \mapsto |f(t)|e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Il découle alors du théorème de convergence dominée que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^{+\infty} \psi = 0$
i.e. $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{L}(f)(x_n) = 0$. De la caractérisation séquentielle de l'existence de limite on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

7.b) Comme $f \in E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de 5. que $f' \in E$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) \qquad (\star)$.

Comme f' est bornée, $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \left|\mathcal{L}(f')(x)\right| \leqslant \|f'\|_\infty \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{\|f'\|_\infty}{x}$.

Par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f')(x) = 0$.
On déduit de $(\star)$ que $x \lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8.a) f étant continue sur $\mathbb{R}_+$ et de limite finie en $+\infty$, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$ *i.e.* $f \in F$.

8.b) Le changement de variable linéaire $x = a_n t$ donne :
$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f\Big(\frac{x}{a_n}\Big) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} h_n(x) dx.$

8.c) h_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. La suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $h : x \mapsto \ell e^{-x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, |h_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty e^{-x} = \varphi_1(x)$.
Comme φ_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{=} t^{-2}$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
D'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} h = \ell$.
Donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \mathcal{L}(f) a_n) = \ell$.

8.d) De la caractérisation séquentielle de l'existence de limite on déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$. Donc, si $\ell \neq 0, x\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ell}{x}$.

9.a) Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, R(x) = R(0) - \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

R est donc une primtive de la fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. D'où R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $R' = -f$.
Par intégration par parties, pour $x > 0$,
$$\forall y \in \mathbb{R}_+^\star, \int_0^y f(t)e^{-tx}dt = \Big[- R(t)e^{-tx}\Big]_{t=0}^{t=y} - x \int_0^y R(t)e^{-tx}dt \qquad (\star\star).$$
Comme $f \in E$, $\displaystyle\int_0^y f(t)e^{-tx}dt \xrightarrow[y\to+\infty]{} \mathcal{L}(f)(x)$.
La fonction R est continue sur $\mathbb{R}_+$, comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, elle est élément de $F \subset E$ d'après I.2.b). Donc $\displaystyle\int_0^y R(t)e^{-tx}dt \xrightarrow[y\to+\infty]{} \mathcal{L}(R)(x)$.
R étant bornée, $R(y)e^{-xy} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ car $x > 0$.
On déduit de $(\star\star)$ que $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

9.b) Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+, R(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f - \int_0^x f \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Ceci se traduit par : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star, \exists A \in \mathbb{R}_+^\star, \forall t \in \mathbb{R}_+, t \leqslant A \Rightarrow |R(t) \leqslant \varepsilon$.
D'après le théorème de Chasles et le résultat de 9.a),
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| = \Big| \int_0^{+\infty} R(t)e^{-xt}dt\Big|$$